Ключи. 9 класс. ВсОШ по математике. Муниципальный этап. 2022-2023 учебный год.

Принципы оценивания

1. *Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.*
2. *Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.*
3. *Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.*

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части— решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в критериях или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. ОТВЕТ: 9 игроков.

Решение. По условию суммарный возраст игроков первой команды увеличился на $1 \cdot 12 = 12$ недель, а второй — на $2 \cdot 12 = 24$ недели. При этом суммарный возраст всех команд не изменился, поэтому суммарный возраст третьей команды уменьшился на $12 + 24 = 36$ недель, а потому в ней $36 : 4 = 9$ игроков.

9.2.ОТВЕТ: 0 или −143.

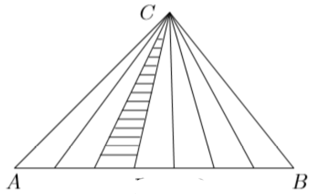
Решение. Пусть корни первого уравнения 2m и n, второго — m и p. Согласно теореме Виета, $2mn = 2k$ и $mp = k$, откуда-либо $m = k = 0$, либо $n = p$. В последнем случае, снова по теореме Виета, получаем $2m + n = 15$, $m + n = 2$, откуда $m = 13$, $n = -11$, и $k = -143$. Проверка показывает, что оба найденных значения для k удовлетворяют условию.

9.3.ОТВЕТ: 4 человека.

Решение. Заметим, что если кто-либо из собравшихся сказал правду, то истинны также и все высказывания говоривших после него. Таким образом, сначала высказывались все лжецы, затем все честные. Пусть честных людей n, тогда первый честный говорил (8−n+1)-ым и его фраза такова: "Здесь не более 8−n честных человек". Так как она верна, получаем $8 - n \geq n$, откуда $n \leq 4$. Аналогично, из того что ложно утверждение предыдущего говорившего, находим $7-n < n$, откуда $n > 3$, а значит $n = 4$.

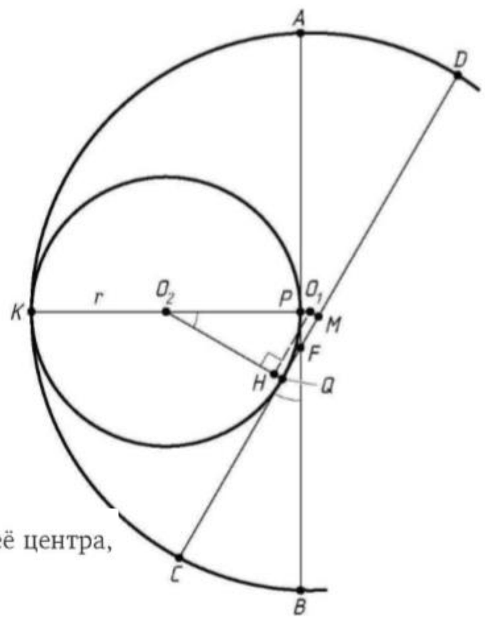
9.4.Решение. Разделим одну из сторон данного треугольника (скажем, AB) на7 равных частей и соединим точки деления с вершиной C (см. рис.). Треугольник ABC разобьётся на 7 треугольников площади 2 /7 каждый.

По принципу Дирихле в некоторый такой треугольник (скажем, в заштрихованный) попадут по крайней мере 3 точки. 1) Если не все из них совпадают с вершинами заштрихованного треугольника, то площадь треугольника с вершинами в этих точках строго меньше 2/ 7, и всё доказано. 2) Пусть все эти точки совпадают с вершинами треугольника и других точек, о которых идёт речь в условии, в этом треугольнике нет. Тогда в оставшихся шести треугольниках разбиения лежат ещё 12 точек, т.е. либо в некотором треугольнике лежат по крайней мере 3 точки, не совпадающих с C (и тогда они искомые), либо в каждом из оставшихся треугольников лежат ровно 2 точки. Тогда выберем 2 точки в треугольнике, соседнем к заштрихованному, и добавим точку C. Эти три точки, очевидно, искомые.



Комментарий: если рассмотрен только 1-й случай с обоснованием, то 3 балла.

9.5. Ответ: 30°.



Решение. Пусть окружности радиусов R > r с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внутренним образом в точке K, хорда AB большей окружности перпендикулярна O_1O_2 и касается меньшей окружности в точке P, а равная ей хорда CD большей окружности касается меньшей окружности в точке Q и пересекается с хордой AB в точке F. Опустим перпендикуляр O_1M на CD и рассмотрим прямоугольную трапецию O_1O_2QM.

Поскольку равные хорды окружности равноудалены от её центра, то

$$O_1M = O_1P = O_1K - PK = R - 2r.$$

Опустим перпендикуляр O_1H на O_2Q. Тогда

$$O_2H = O_2Q - HQ = O_2Q - O_1M = r - (R - 2r) = 3r - R,$$

значит,

$$\cos\angle O_1O_2H = \frac{O_2H}{O_1O_2} = \frac{3r-R}{R-r} = \frac{3-\frac{R}{r}}{\frac{R}{r}-1} = \frac{3-(9-4\sqrt{3})}{9-4\sqrt{3}-1} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}-6}{8-4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle QFB = \angle O_1O_2H = 30^\circ.$$

Заметим, что

$$\sqrt{3} < 2 \iff 3 < 2\sqrt{3} \iff 6 < 4\sqrt{3} \iff 9 - 4\sqrt{3} < 3,$$

поэтому $\frac{R}{r} = 9 - 4\sqrt{3} < 3$. Это означает, что точка H действительно лежит на отрезке O_2Q.