**Муниципальный этап**
**Всероссийской олимпиады школьников по математике**
**2022-2023 учебный год**

# Решения задач и критерии оценивания. 9 класс

$\boxed{\mathbf{9.1}}$ *В клетчатом квадрате $7\times7$ отметили несколько клеток, причём в каждом столбце и каждой строке хотя бы по одной клетке. Оказалось, что в любой строке квадрата отмечено нечётное число клеток, а в любом столбце число отмеченных делится на $3$. Какое наименьшее и наибольшее количество клеток таблицы могло быть отмечено?*

**Решение:** Оценка снизу: В каждом столбце отмечено либо 3, либо 6 клеток, поэтому всего их отмечено хотя бы $3\cdot7=21$.

Оценка сверху: суммируя количество отмеченных клеток по строкам, мы получаем, что общее число отмеченных клеток нечётно, а суммируя по столбцам — что оно делится на 3. При этом в каждом столбце отмечено не более 6 клеток из 7, поэтому суммарно отмечено не более 42 клеток. Наибольшее кратное 3 нечётное число, не превосходящее 42 — это 39, и в таблице не больше такого количества отмеченных клеток.

Примеры, реализующие две оценки, приведены ниже.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | | | | |
| | X | X | X | | | |
| | | X | X | X | | |
| | | | X | X | X | |
| | | | | X | X | X |
| X | | | | | X | X |
| X | X | | | | | X |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | X | X | | X | X | X |
| | X | X | X | | X | X |
| | X | X | X | X | | X |
| | X | X | X | X | X | |
| X | | | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X |
| X | X | X | X | X | X | X |

**Критерии:**

- Оценка и пример на 21 клетку — по 1 баллу (баллы суммируются);
- Оценка и пример на 39 клеток — по 2 балла (баллы суммируются между собой и с предыдущим критерием).

$\boxed{\mathbf{9.2}}$ *В рыбалке участвовали $11$ опытных рыбаков и $n$ детей. Вместе они поймали $n^2+5n+22$ рыб, причём все опытные рыбаки поймали поровну, и все дети поймали поровну, но каждый на $10$ меньше, чем опытный рыбак. Кого на рыбалке было больше — опытных рыбаков или детей?*

**Решение:** Пусть каждый ребёнок поймал $m$ рыб. Тогда $nm+11(m+10)=n^2+5n+22$. Отсюда $(n+11)m=n^2+3n-88$. Значит, правая часть делится на $n+11$. Имеем $n^2+5n-88=(n+11)(n-6)-22$, поэтому 22 делится на $n+11$. Единственный делитель числа 22, больший 11 — это само число 22, поэтому $n+11=22, n=11$. Значит, опытных рыбаков и детей было поровну.

**Критерии:**

- За отсутствие примера для $n=11$ баллы не снижаются.
- Показано, что $n=11$ подходит, но не доказано, что других вариантов нет — 1 балл.

$\boxed{\mathbf{9.3}}$ *На доске нарисовали остроугольный $\triangle ABC$, отметили основания высот $A_1$ и $B_1$, а также середину $C_1$ стороны $AB$. Затем весь чертёж стёрли, кроме точек $A_1$, $B_1$ и $C_1$. Можно ли восстановить исходный $\triangle ABC$?*

**Решение 1:** Рассмотрим произвольный остроугольный $\triangle ABC$ с углом $\angle C=60^\circ$. Поскольку углы $\angle AA_1B$ и $\angle BB_1A$ прямые, четырёхугольник $AB_1A_1B$ вписанный и $\angle A_1B_1C=\angle ABC$. Тогда треугольники $ABC$ и $A_1B_1C$ подобны с коэффициентом $\frac{A_1C}{AC}=\cos\angle C=\frac{1}{2}$, откуда $A_1B_1=\frac{1}{2}AB$. Но $B_1C_1$ и $A_1C_1$ — медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузой $AB$, поэтому $B_1C_1=C_1A_1=\frac{AB}{2}$. Тогда если $\triangle A_1B_1C_1$ правильный, невозможно восстановить значения углов при вершинах $A$ и $B$.

**Решение 2:** Заметим, что $A_1C_1 = B_1C_1 = \frac{AB}{2}$. Проведём в окружности с центром $C_1$ произвольный диаметр $A'B'$ такой, что точки на окружности идут в порядке $A' - B_1 - A_1 - B'$. Пусть лучи $A'B_1$ и $B'A_1$ пересекаются в точке $C'$. Тогда в треугольнике $A'B'C'$ точка $C_1$ — середина $A'B'$, а углы $\angle A'A_1B'$ и $\angle B'B_1A'$ — прямые как опирающиеся на диаметр, значит, $\triangle A'B'C'$ один из подходящих. Поскольку диаметр можно провести бесконечным числом способов, то таких подходящих треугольников много, и восстановить исходный невозможно.

**Решение 3:** Проведём построение для произвольного неравнобедренного $\triangle ABC$. Поскольку $A_1C_1 = B_1C_1$, симметрия относительно серединного перпендикуляра $l$ к прямой $A_1B_1$ оставляет на месте точку $C$ и меняет местами точки $A_1$ и $B_1$. Тогда у треугольника $\triangle A'B'C'$, где точки $A', B', C'$ симметричны соответственно точкам $B, A, C$ относительно прямой $l$, точки $A_1, B_1, C_1$ находятся на тех же местах, что и у $\triangle ABC$, при этом два треугольника не могут совпасть.

**Критерии:**

- Замечено, что $A_1C_1 = B_1C_1$ — 1 балл;
- Соотношение $A_1B_1 = AB\cos\angle C$ принимается без доказательства;
- Приведено построение только одного из подходящих треугольников — 1 балл.

$\boxed{\textbf{9.4}}$ *Найдётся ли прямоугольная коробка, все три измерения которой (высота, ширина и глубина) выражаются иррациональными числами, а площадь поверхности и объём — целыми?*

**Решение 1:** Рассмотрим коробку со сторонами $\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, 3+2\sqrt{2}$. Её объём равен $(\sqrt{2}-1)^2(3+2\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 1$, а площадь поверхности равна $2(\sqrt{2}-1)^2 + 4(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}) = 2(3-2\sqrt{2}) + 4(\sqrt{2}+1) = 10$.

**Решение 2:** Рассмотрим многочлен $f(x) = x^3 - 30x^2 + 31x - 1$. Поскольку $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, f(100) > 0$, уравнение $f(x) = 0$ имеет три положительных корня. Числа $\pm 1$ не являются корнями, поэтому все корни уравнения иррациональны. Возьмём их в качестве размеров коробки. По теореме Виета их сумма попарных произведений равна 31 (откуда площадь поверхности равна 62), а произведение равно 1.

**Критерии:**

- Неочевидна иррациональность сторон коробки, их положительность и/или целостность объёма и площади поверхности — снимается до 3 баллов;
- Измерения приводятся как корни многочлена, но не проверяется, что этот многочлен имеет три иррациональных положительных корня — не более 3 баллов;
- Утверждение “корень целой степени из целого числа — число либо целое, либо иррациональное” и следствия из него принимаются без доказательства.

$\boxed{\textbf{9.5}}$ *На какое наибольшее количество непересекающихся групп можно разбить все целые числа от* 1 *до* 20 *так, чтобы в каждой группе сумма чисел была полным квадратом?*

**Решение:** Группу из одного числа могут образовывать только 4 квадрата. Остальные 16 чисел должны быть разбиты на группы хотя бы по два. Поэтому всего групп будет не более 12. Проверим, что ровно 12 групп быть не может. Действительно, в таком случае числа 1, 4, 9, 16 образуют отдельные группы, а остальные числа разбиты на пары. Тогда в пару к числу 8 может быть только 17, а тогда к числу 19 в пару может быть только 6, поэтому к числу 10 в пару остаётся только 15. К числу 12 в пару может быть только 13. К числу 18 только 7. К числу 20 только 5, а тогда к числу 11 только 14. Таким образом, для всех неквадратов кроме 2 и 3 мы однозначно восстановили пары, но 2 и 3 не могут образовывать группу, т.к. их сумма не квадрат. Противоречие.

Примером разбиения на 11 групп служит указанное разбиение неквадратов на пары, а числа 2 и 3 мы объединяем в группу с 4.

**Критерии:**

- Доказано только, что групп не больше 11, примера нет — 4 балла;
- Приведён пример, но не доказано, что 12 групп не бывает — 2 балла.