Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

10 класс

1. Вариант 1.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 14.

Вариант 2.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 16.

Вариант 3.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 47.

Вариант 4.

При перемножении двузначного и трёхзначного чисел получилось четырёхзначное число вида $A = \overline{abab}$. Найдите наибольшее A, если известно, что A делится на 23.

2. Вариант 1. Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 1 больше цифры в разряде десятков (число не может начинаться с нуля).

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 2 больше цифры в разряде сотен (число не может начинаться с нуля).

Вариант 3.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде сотен ровно на 3 больше цифры в разряде единиц (число не может начинаться с нуля).

Вариант 4.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых цифра в разряде единиц ровно на 4 меньше цифры в разряде десятков (число не может начинаться с нуля).

3. Вариант 1.

В семье Ивановых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 45 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 70 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 14 лет?

Вариант 2.

В семье Петровых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 49 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 95 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 25 лет?

Вариант 3.

В семье Сидоровых и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 43 года. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 83 года. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 21 год?

Вариант 4.

В семье Барбоскиных и мама, и папа, и трое их детей родились 1 апреля. Когда в семье родился первенец, родителям в сумме было 47 лет. Третий ребенок в семье появился год назад, когда сумма возрастов всех членов семьи составляла 80 лет. Сколько лет сейчас среднему ребёнку, если сумма возрастов детей составляет 18 лет?

4. Вариант 1.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 3 : 2$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Вариант 2.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 5 : 3$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Вариант 3.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 7 : 4$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

Вариант 4.

Диагонали AC и BD равнобокой трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AD : BC = 8 : 5$. Окружность ω с центром O, проходящая через вершины A и D, пересекает продолжение основания BC за точку B в точке K. Оказалось, что $BK = BO$. Найдите отношение основания AD к радиусу окружности ω.

5. Вариант 1.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 34 пути, посёлки Б и В – 29 путей. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Вариант 2.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 55 пути, посёлки Б и В – 50 путей. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Вариант 3.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 64 пути, посёлки Б и В – 53 пути. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

Вариант 4.

В районе три посёлка А, Б и В связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовём *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки А и Б связывают 74 пути, посёлки Б и В – 61 путь. Какое наименьшее число путей может связывать посёлки А и В?

6. Вариант 1.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1; 3.5)$, $B(13.5; 3.5)$, $C(11; 16)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y = n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Вариант 2.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1; 3.5)$, $B(14.5; 3.5)$, $C(11; 17)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y = n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Вариант 3.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(15.5;3.5)$, $C(11;18)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

Вариант 4.

Вершины треугольника имеют координаты $A(1;3.5)$, $B(16.5;3.5)$, $C(11;19)$. Рассматриваются горизонтальные линии, задаваемые уравнениями $y=n$, где n – целое. Найдите сумму длин отрезков, высекаемых на этих прямых сторонами треугольника.

7. Вариант 1.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{2(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{5x+y}{x-2y}$, в ответ запишите их сумму.

Вариант 2.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{7x+y}{x+2y}$, в ответ запишите их сумму.

Вариант 3.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{2(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{6x-7y}{2x-5y}$, в ответ запишите их сумму.

Вариант 4.

Числа x и y удовлетворяют равенству $\frac{x}{x+y}+\frac{2y}{(x-y)}=1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{8x+3y}{2x+5y}$, в ответ запишите их сумму.

8. Вариант 1.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x)=ax^2+bx+c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 4 корни трехчлена $Q(x)=cx^2+bx+a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Вариант 2.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Вариант 3.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 9 корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?

Вариант 4.

Рассматривается квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, у которого различные положительные корни. Вася выписал на доску четыре числа: корни $P(x)$, а также умноженные на 16 корни трехчлена $Q(x) = cx^2 + bx + a$. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма выписанных чисел?