Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

11 класс

1. Вариант 1.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 51.

Вариант 2.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 53.

Вариант 3.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 27.

Вариант 4.

При перемножении двух двузначных чисел получилось четырёхзначное число A, у которого первая цифра совпадает со второй, а предпоследняя – с последней. Найдите наименьшее A, если известно, что A делится на 29.

2. Вариант 1.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых три последние цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Вариант 2.

Найдите количество четырёхзначных чисел, у которых три первые цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Вариант 3.

Найдите количество пятизначных чисел, у которых три последние цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

Вариант 4.

Найдите количество пятизначных чисел, у которых три первые цифры образуют возрастающую арифметическую прогрессию (числа не могут начинаться с нуля).

3. Вариант 1.

Найдите отношение $\frac{16b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 4 раза больше другого.

Вариант 2.

Найдите отношение $\frac{27b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в 3 раза больше другого.

Вариант 3.

Найдите отношение $\frac{15b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 5 раз больше другого.

Вариант 4.

Найдите отношение $\frac{40b^2}{ac}$, если известно, что один из корней уравнения $ax^2+bx+c=0$ в 2 раза больше другого.

4. Вариант 1.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2022x)}+\mathrm{tg}(2022x)=\frac{1}{2022}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2022x)}-\mathrm{tg}(2022x)$.

Вариант 2.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2023x)}+\mathrm{tg}(2023x)=\frac{1}{2023}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2023x)}-\mathrm{tg}(2023x)$.

Вариант 3.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2021x)}+\mathrm{tg}(2021x)=\frac{1}{2021}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2021x)}-\mathrm{tg}(2021x)$.

Вариант 4.

Известно, что
$$\frac{1}{\cos(2002x)}+\operatorname{tg}(2002x)=\frac{1}{2002}.$$
Найдите $\frac{1}{\cos(2002x)}-\operatorname{tg}(2002x)$.

5. Вариант 1.

Известно, что
$$(x^2-x+3)(y^2-6y+41)(2z^2-z+1)=77.$$
Найдите $\frac{xy}{z}$.

Вариант 2.

Известно, что
$$(x^2+x+3)(y^2+10y+57)(2z^2+z+2)=165.$$
Найдите $\frac{xy}{z}$.

Вариант 3.

Известно, что
$$(x^2+x+5)(y^2+6y+41)(2z^2+z+2)=285.$$
Найдите $\frac{xy}{z}$.

Вариант 4.

Известно, что
$$(x^2+x+5)(y^2+10y+57)(2z^2+z+1)=133.$$
Найдите $\frac{xy}{z}$.

6. Вариант 1.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 34 пути, посёлки B и C – 29 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Вариант 2.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 55 пути, посёлки B и C – 50 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Вариант 3.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 64 пути, посёлки B и C – 53 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

Вариант 4.

В районе три посёлка A, B и C связаны просёлочными дорогами, при этом любые два посёлка связывают несколько (больше одной) дорог. Движение на дорогах двустороннее. Назовем *путем* из одного поселка в другой либо связывающую их дорогу, либо цепочку из двух дорог, проходящую через третий поселок. Известно, что посёлки A и B связывают 74 пути, посёлки B и C – 61 путей. Какое наибольшее число путей может связывать посёлки A и C?

7. Вариант 1.

По кругу выписано 103 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Вариант 2.

По кругу выписано 153 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Вариант 3.

По кругу выписано 203 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

Вариант 4.

По кругу выписано 253 натуральных числа. Известно, что среди любых 5 подряд идущих чисел найдутся хотя бы два четных числа. Какое наименьшее количество четных чисел может быть во всем круге?

8. Вариант 1.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $\frac{10BD}{AC}$, если $\frac{AP}{AC} = \frac{4}{9}$ и $\frac{DQ}{DB} = \frac{28}{81}$.

Вариант 2.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $\frac{6AC}{BD}$, если $\frac{AP}{AC} = \frac{4}{9}$ и $\frac{DQ}{DB} = \frac{16}{81}$.

Вариант 3.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $AC : BD$, если $AP : AC = 12/25$ и $DQ : DB = 8/25$.

Вариант 4.

Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть BP и CQ – перпендикуляры, опущенные из вершин B и C на диагонали AC и BD соответственно (точка P лежит на отрезке AC, а точка Q лежит на отрезке BD). Найдите отношение $AC : BD$, если $AP : AC = 0,49$ и $DQ : DB = 0,41$.