

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

2022-2023 учебный год. Камчатский край

**возрастная группа 10 класс**

Максимальное количество баллов 35

**10.1.** Назовём праздничными следующие 2 операции, содержащие по 2 арифметических действия: за первую праздничную операцию число уменьшается вдвое (если оно чётное), затем увеличивается на 1, за вторую - число увеличивается в 5 раз, а затем увеличивается на 1. Можно ли получить из числа 2023 число 2022 производя только праздничные операции?

**10.2.** Известно, что для чисел  $x, y, z$  справедливо равенство  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$ .

Докажите, что какие-то два из этих чисел являются противоположными друг другу.

**10.3.** При каких простых  $p$ , значение выражения  $22p^2 + 23$  является простым?

Рассмотрим все остатки при делении на 3.

1) Если  $p = 3k$  (делится нацело), значит  $p = 3$ , только одно простое число делится нацело на 3. Тогда  $22p^2 + 23 = 221$ .  $221 = 17 \cdot 13$ , то есть составное.

2) Если  $p = 3k \pm 1$  (даёт остаток 1 или 2), значит

$$\begin{aligned} 22p^2 + 23 &= 22(3k \pm 1)^2 + 23 = 22 \cdot 9k^2 \pm 22 \cdot 6k + 22 + 23 = \\ &= 22 \cdot 9k^2 \pm 22 \cdot 6k + 45. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое делится на 3 и сумма не меньше, чем 23. Значение выражения – составное.

**10.4.** Пусть точка  $P$  является пересечением диагоналей выпуклого четырёхугольника  $KLMN$ . Площади треугольников  $KLM$ ,  $LMN$  и  $NKP$  равны  $8 \text{ м}^2$ ,  $9 \text{ м}^2$  и  $10 \text{ м}^2$  соответственно. Найдите площадь четырёхугольника  $KLMN$ .

**10.5.** Какое наименьшее значение может принимать  $\text{НОД}(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – натуральные числа, если  $\text{НОК}(x, y) = (x - y)^2$ ?