

10-1-1. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27».

а) 81; б) 999; в) 9918; г) 18.

10-1-2. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27».

а) 81; б) 999; в) 9918; г) 18.

10-1-3. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27».

а) 54; б) 999; в) 2799; г) 36.

10-1-4. Выберите числа, которые являются контрпримерами к данному утверждению: «Если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27».

а) 54; б) 999; в) 2799; г) 36.

10-2-1. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x , то следующее равно $\frac{1}{1-x}$. Первое число в ряду равно 2. Чему равно пятисотое число?

Видим, что последовательность зациклилась с периодом 3. Так как число 500 при делении на 3 даёт остаток 2, то 500-й член будет такой же, как 2-й. То есть пятисотое число будет равно -1 .

10-2-2. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x , то следующее равно $\frac{1}{x}$. Первое число в ряду равно -1 . Чему равно трёхсотое число?

10-2-3. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x , то следующее равно $1 - \frac{1}{x}$. Первое число в ряду равно 3. Чему равно шестисотое число?

10-2-4. Петя выписывает ряд чисел: если текущее число равно x , то следующее равно $1 - \frac{1}{x}$. Первое число в ряду равно 2. Чему равно двухсотое число?

10-3-1. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 707.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

10-3-2. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 505.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

10-3-3. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 303.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

10-3-4. Целые неотрицательные числа a, b, c, d таковы, что

$$ab + bc + cd + da = 1111.$$

Какое наименьшее значение может иметь сумма $a + b + c + d$?

10-4-1. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 25 партий. Аня выбирала камень 12 раз, ножницы — 6 раз, бумагу — 7 раз. Боря выбирал камень 13 раз, ножницы — 9 раз, бумагу — 3 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз могла выиграть Аня? Укажите все возможные ответы.

10-4-2. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 36 партий. Аня выбирала камень 6 раз, ножницы — 5 раз, бумагу — 25 раз. Боря выбирал камень 2 раза, ножницы — 31 раз, бумагу — 3 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз могла выиграть Аня? Укажите все возможные ответы.

10-4-3. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 32 партии. Аня выбирала камень 19 раз, ножницы — 5 раз, бумагу — 8 раз. Боря выбирал камень 2 раза, ножницы — 6 раз, бумагу — 24 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз мог выиграть Боря? Укажите все возможные ответы.

10-4-4. Аня и Боря играют в камень-ножницы-бумага. В этой игре каждый игрок выбирает одну из фигур: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. Если игроки выбирают одинаковые фигуры, то партия заканчивается ничьёй.

Аня и Боря провели 20 партий. Аня выбирала камень 13 раз, ножницы — 3 раза, бумагу — 4 раза. Боря выбирал камень 7 раз, ножницы — 9 раз, бумагу — 4 раза. Ни в одной партии не было ничьей. Сколько раз мог выиграть Боря? Укажите все возможные ответы.

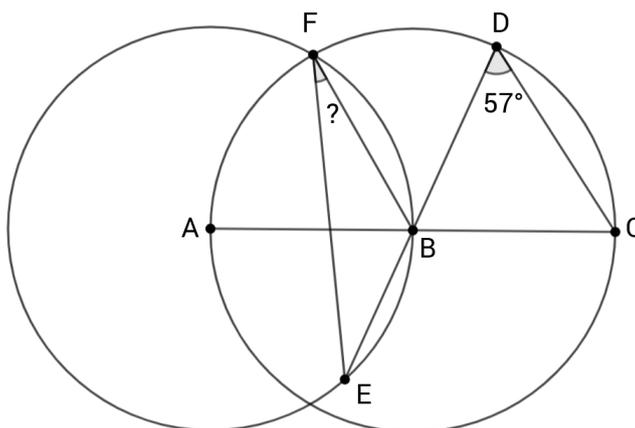
10-5-1. Среди n углов выпуклого n -угольника $n - 1$ угол равен 150° , а оставшийся — меньше 150° . Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

10-5-2. Среди n углов выпуклого n -угольника $n - 1$ угол равен 140° , а оставшийся — меньше 140° . Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

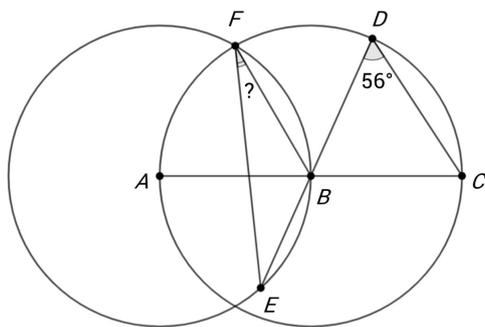
10-5-3. Среди n углов выпуклого n -угольника $n - 1$ угол равен 160° , а оставшийся угол — острый. Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

10-5-4. Среди n углов выпуклого n -угольника $n - 1$ угол равен 145° , а оставшийся — меньше 145° . Для каких n это возможно? Укажите все возможные ответы.

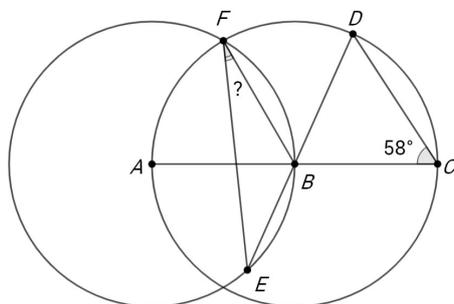
10-6-1. На рисунке две окружности с центрами A и B . Кроме того, точки A , B и C лежат на одной прямой, точки D , B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



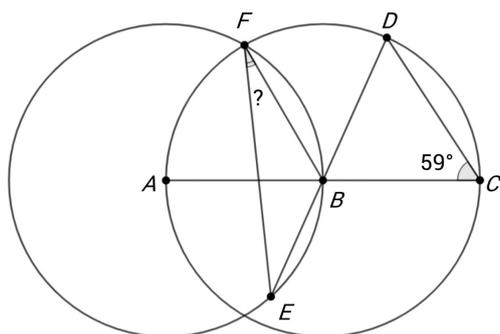
10-6-2. На рисунке две окружности с центрами A и B . Кроме того, точки A , B и C лежат на одной прямой, точки D , B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



10-6-3. На рисунке две окружности с центрами A и B . Кроме того, точки A , B и C лежат на одной прямой, точки D , B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



10-6-4. нке две окружности с центрами A и B . Кроме того, точки A , B и C лежат на одной прямой, точки D , B и E также лежат на одной прямой. Найдите градусную меру угла, отмеченного знаком «?».



10-7-1. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 90 человек: 40 баронов, 30 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

10-7-2. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 110 человек: 50 баронов, 40 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

10-7-3. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 55 человек: 25 баронов, 20 графов и 10 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

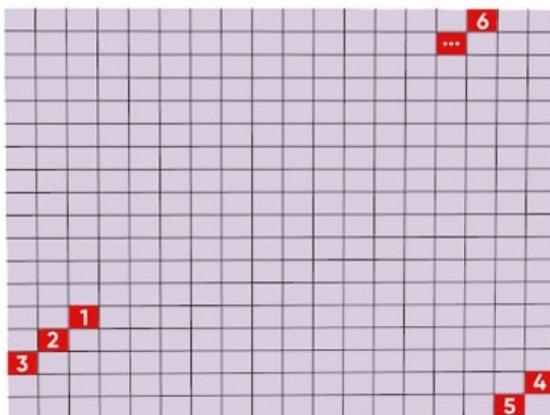
Итак, мы показали, что из 55 пирующих как минимум трое не встанут, и построили пример, как только трое могут не встать. Тем самым ответ в задаче 52.

10-7-4. За большим круглым столом лицом к центру стола пируют 95 человек: 45 баронов, 30 графов и 20 маркизов. По сигналу должны встать ровно те, у кого оба соседа — левый и правый — имеют одинаковый титул. Какое наибольшее количество людей может встать?

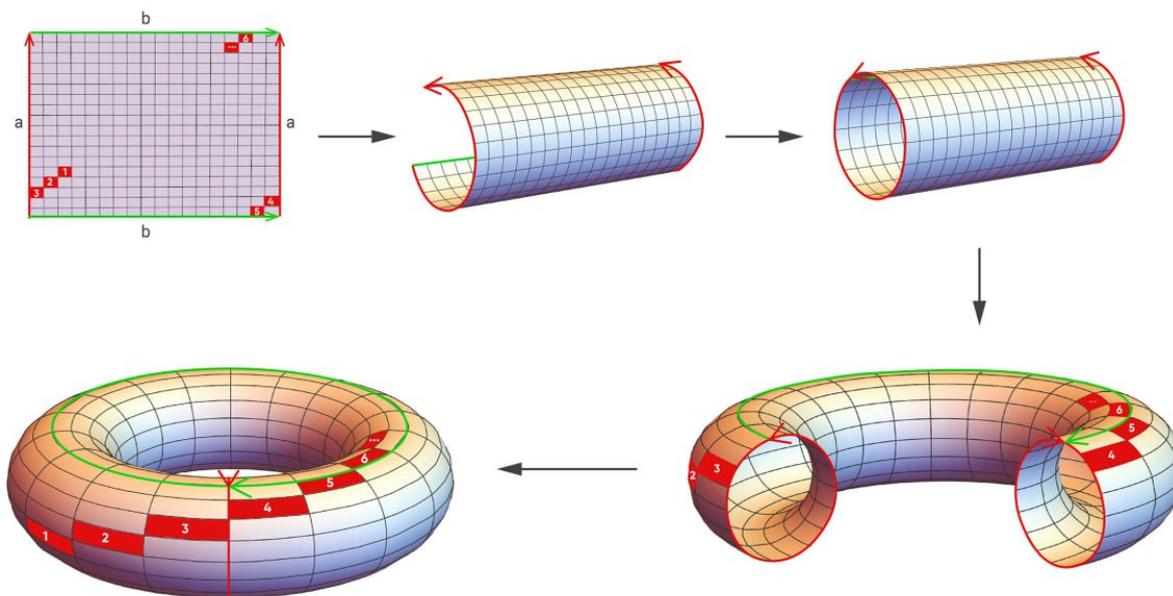
Например, чтобы встал граф, оба его соседа должны иметь одинаковый титул, но не обязательно графский.

10-8-1. Есть магический клетчатый лист бумаги размера 2000×70 , изначально все клетки серые. Маляр встаёт на некоторую клетку и красит её в красный цвет. Каждую секунду маляр делает два шага: на одну клетку влево и на одну клетку вниз, и закрашивает красным цветом ту клетку, на которой он оказался после двух шагов. Если маляр стоит в самом левом столбце и должен сделать шаг влево, то он этим шагом телепортируется в самую правую клетку той же строки; если маляр стоит в нижней строке и должен сделать шаг вниз, то он этим шагом телепортируется в верхнюю клетку того же столбца. Через несколько ходов маляр вернулся на клетку, с которой начинал. Сколько в этот момент красных клеток на листе?

На рисунке приведен пример ходов маляра: сначала маляр в клетке 1, потом в клетке 2 и т.п.



Комментарий. Приведём другую, эквивалентную, формулировку этой задачи. Из клетчатого листа бумаги 2000×70 склеивается тор, как показано на картинке.



Маляр ходит по тору «по диагонали». Через несколько ходов маляр вернулся на клетку, с которой начинал. Сколько в этот момент красных клеток на листе?

10-8-2. Размер 2000×70 заменён на размер 5000×70 .

10-8-3. Размер 2000×70 заменён на размер 2000×90 .

10-8-4. Размер 2000×70 заменён на размер 3000×70 .