

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2022-2023 уч.год
11 класс

1. В каждой из вершин куба, ребро которого равно 1, находится центр шара. Все шары одинаковы, и каждый касается трех соседних шаров. Найдите длину той части пространственной диагонали куба, которая лежит вне шаров.

2. На шахматную доску поставили некоторое количество белых и черных пешек. Число белых пешек больше, чем число черных пешек. Число пешек, стоящих на черных клетках, меньше числа пешек, стоящих на белых клетках. Докажите, что найдется по крайней мере одна белая пешка, стоящая на белой клетке.

3. Парабола

$$f(x) = x^2 + px + q$$

пересекает координатные оси в трех различных точках. Назовем эти точки пересечения с осями A, B, C . Пусть точка D имеет координаты $D(0; 1)$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки A, B, C, D .

4. Пусть a, b – длины катетов, c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} < \sqrt{2} + 2$$

5. Компьютер сгенерировал несколько различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел он выяснил, на какую наибольшую степень числа 2022 делится их разность. Вариант, что разность делится только на нулевую степень, тоже возможен. Оказалось, что разных ответов у компьютера получилось 2023. Какое наибольшее количество чисел мог сгенерировать компьютер?

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.

Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!