

11 класс

1. Найдутся ли такие натуральные числа a , b и c , что у каждого из уравнений $ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx - c = 0$, $ax^2 - bx + c = 0$, $ax^2 - bx - c = 0$ оба корня – целые?
2. У Васи имеются монеты достоинством в 49 тугриков, у Пети – достоинством в 99 тугриков. Вася должен Пете тугрик. Смогут ли они рассчитаться?
3. Найдите наибольшее значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$, если x, y, z – целые числа, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} xy + x + y = 20, \\ yz + z + y = 6, \\ xz + x + z = 2. \end{cases}$$

4. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и P . Обозначим через MA хорду окружности ω_1 , касающуюся окружности ω_2 в точке M , а через MB – хорду окружности ω_2 , касающуюся окружности ω_1 в точке M . На прямой MP отложен отрезок $PH = MP$. Докажите, что четырёхугольник $MANB$ вписанный.
5. Числа a , b и c удовлетворяют условию

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0.$$

Докажите, что

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$