САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

19 ноября 2022 г. I тур 11 класс 1 вариант

---

1. В каждой клетке таблицы $m \times n$ стоит крестик или нолик. При этом в каждой строке стоит не меньше 19 крестиков, а в каждом столбце — не меньше 19 ноликов. Докажите, что $m + n \geqslant 76$.

2. Даны квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ со старшими коэффициентами, равными 1. Наименьшее значение трёхчлена $f(x)$ равно 10, наименьшее значение $g(x)$ равно 20. А наименьшее значение квадратного трёхчлена $f(x) + g(x)$ равно 50 и достигается в точке $x = x_0$. Найдите $f(x_0)$ и $g(x_0)$.

3. Функции p и q определены на множестве натуральных чисел, не превосходящих 400, и принимают натуральные значения, не превосходящие 200. Докажите, что уравнение

$$p(x) - p(y) = q(x) - q(y)$$

имеет решение в натуральных числах $x \neq y$.

4. Через вершины A и B равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проведена окружность, пересекающая отрезки AC и BC в точках X и Y соответственно. Описанная окружность треугольника CXY пересекает отрезок BX в точке Z. Оказалось, что $AB = 2CZ$. Найдите BZ/ZX.

5. Натуральное число N имеет больше 1000 натуральных делителей (включая 1 и N). Все эти делители выписаны на доске. Саша стёр 250 наибольших и 250 наименьших из них. Среди оставшихся делителей оказалось поровну делящихся на 13 и не делящихся на 13. Докажите, что среди всех делителей тоже поровну делящихся и не делящихся на 13.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон;

класс, школа, район школы;

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

19 ноября 2022 г. I тур 11 класс 2 вариант

---

1. В каждой клетке таблицы $a \times b$ стоит крестик или нолик. При этом в каждой строке стоит не меньше 13 крестиков, а в каждом столбце — не меньше 13 ноликов. Докажите, что $a + b \geqslant 52$.

2. Даны квадратные трехчлены $p(t)$ и $q(t)$ со старшими коэффициентами, равными 1. Наименьшее значение трёхчлена $p(t)$ равно 15, наименьшее значение $q(t)$ равно 35. А наименьшее значение квадратного трёхчлена $p(t) + q(t)$ равно 70 и достигается в точке $t = t_0$. Найдите $p(t_0)$ и $q(t_0)$.

3. Функции f и g определены на множестве натуральных чисел, не превосходящих 200, и принимают натуральные значения, не превосходящие 100. Докажите, что уравнение

$$f(x) - f(y) = g(x) - g(y)$$

имеет решение в натуральных числах $x \neq y$.

4. Через вершины B и C равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) проведена окружность, пересекающая отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Описанная окружность треугольника AKL пересекает отрезок CK в точке N. Оказалось, что $BC = 3AN$. Найдите KN/NC.

5. Натуральное число N имеет больше 800 натуральных делителей (включая 1 и N). Все эти делители выписаны на доске. Саша стёр 200 наибольших и 200 наименьших из них. Среди оставшихся делителей оказалось поровну делящихся на 11 и не делящихся на 11. Докажите, что среди всех делителей тоже поровну делящихся и не делящихся на 11.

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон;

класс, школа, район школы;

ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.

Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru