КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

10 класс

10.1. (*7 баллов*)

Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.

Решение: пусть M – сумма чисел в наборе. Тогда число a из набора заменяется числом $b = M - a$. Просуммируем эти равенства для всех a:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = M - a_1 + M - a_2 + \cdots + M - a_{100} =$$
$$= 100M - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}).$$

По условию $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = M$.

Тогда $2M = 100M, 98M = 0, M = 0$.

Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор. Числа в наборе разбиваются на пары a и $-a$. Числа различные, следовательно, 0 не входит. Таким образом, среди набора 50 чисел положительных и 50 отрицательных. Произведение 50 отрицательных чисел будет положительным.

10.2. (*7 баллов*)

Найдите сумму корней уравнения $\left||x| - 7\right| = 6 - \frac{x^2}{4}$.

Ответ: 0.

Решение: заметим, что если есть решение $x = x_1$, то есть и решение $x = -x_1$.

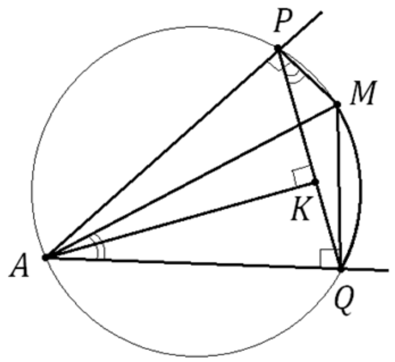
Легко проверить, что $x = 2$ является решением уравнения. Следовательно, корни уравнения существуют.

Не находя всех корней данного уравнения, можем заключить, что их сумма равна 0.

10.3. (*7 баллов*)

Из произвольной точки M внутри данного угла A опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Решение.



Рассмотрим четырехугольник $APMQ$: $\angle P + \angle Q = 180°$. Следовательно, около четырёхугольника $APMQ$ можно описать окружность. $\angle APM = 90°$, AM – диаметр этой окружности.

$\angle MAQ = \angle QPM$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу MQ. $\angle PAK = \angle QPM$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Тогда $\angle PAK = \angle MAQ$.

10.4. (*7 баллов*)

В школьном шахматном блицтурнире каждый участник встречался с каждым по одному разу. Встречи каждого тура проходили одновременно. Опасаясь, что инвентаря не хватит, ровно половина участников принесла его из дома: большая часть из них принесла шахматы, а остальные принесли шахматные часы. В итоге, в каждом туре использовались одни принесенные часы и один из принесенных комплектов шахмат. По окончании турнира выяснилось, что каждый принесенный комплект шахмат использовался одинаковое количество раз и каждые принесенные часы также использовались одинаковое количество раз. Найдите количество участников турнира.

Ответ: 16.

Решение: пусть n – искомое количество участников, тогда, так как ровно половина участников принесла инвентарь из дома, то $n = 2k$, при этом количество сыгранных туров равно $2k - 1$. Предположим, что было принесено p комплектов шахмат и m часов, где $m < p$. Так как каждый из этих комплектов шахмат и каждые часы использовались одинаковое количество раз, то числа p и m являются делителями числа $2k-1$.

По условию, $k=p+m$, то есть $2k-1=2p+2m-1$. Так как $2k-1$ делится на p, то и $2m-1$ делится на p. Тогда, учитывая, что $m < p$, получим, что $2m-1=p$. Поскольку $2k-1$ делится на m, то и $2k-1=4m-3$ делится на m. Следовательно, m является делителем числа 3, то есть $m=1$ или $m=3$.

Первый случай невозможен, так как при $m=1$ $p=2m-1=1$ (противоречит тому, что $m < p$). Во втором случае: $m=3, p=5$, то есть $n=(5+3)\cdot 2=16$.

10.5. (*7 баллов*)

Корень трехчлена ax^2+bx+b умножили на корень трехчлена ax^2+ax+b и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решение: пусть t – один из указанных корней, то есть $at^2+bt+b=0$. Тогда другой корень равен $\frac{1}{t}$ и $a\frac{1}{t^2}+a\frac{1}{t}+b=0$, откуда $bt^2+at+a=0$.

Сложим равенства $bt^2+at+a=0$ и $at^2+bt+b=0$, получим: $(a+b)(t^2+t+1)=0$.

Так как второй множитель принимает только положительные значения, то $a+b=0$ или $b=-a$. Тогда первое уравнение принимает вид:

$$at^2-at-a=0, a(t^2-t-1)=0,$$

откуда $t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{t}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют две пары чисел: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.