ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:
а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;
б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;
в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

10 класс

1. Сколько всего шестизначных натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 5 и каждая последующая цифра меньше предыдущей?

Ответ: 84 числа.

Решение. *Первое решение.* Рассмотрим десятизначное число 9876543210, цифры которого расположены в порядке убывания. Вычеркивая из него ровно четыре какие-либо цифры, будем получать шестизначное число, удовлетворяющее условию убывания цифр. Чтобы оставшееся число не содержало цифру «5», нужно вычеркивать его одним из четырех цифр. Все такие возможные вычеркивания цифр дадут все удовлетворяющее условию шестизначные числа. Посчитаем количество таких способов вычеркивания – это количество сочетаний из 9-ти по 3(так как цифру 5 вычеркиваем обязательно), или численно, $C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3} = 84$ способами. Можно первоначально рассмотреть девятизначное число 987643210 с «удаленной» заранее цифрой «5» и вычеркивать любые 3 цифры, после чего остаётся 6-значное число, удовлетворяющее условию задачи. Подсчет такой же, $C_9^3 = 84$.

Второе решение. Можно посчитать все комбинации чисел с заданными условиями, если перебирать их, например, в следующем порядке: первая цифра числа(старший разряд) не может быть меньше 6, потому перебираем варианты следующих за ним цифр числа. Например, чисел, начинающихся с «6» всего одно (643210). Для чисел, начинающихся с цифры «7» это 6 вариантов (из числа 643210 нужно вычеркнуть ровно одну цифру). Для чисел, начинающихся с «8» это $C_7^2 = 15$ вариантов (из числа 7643210 нужно вычеркнуть ровно две цифры). Для чисел, начинающихся с «9» это $C_8^3 = 56$ вариантов (из числа 87643210 нужно вычеркнуть ровно три цифры). Итого, $C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 = 1 + 6 + 21 + 56 = 84$ числа.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Правильно произведён подсчёт вариантов чисел при обоснованном способе перебора – 7 баллов. Предложен обоснованный способ подсчета вариантов требуемых по условию чисел (должно быть обосновано получение различных шестизначных чисел, каждое ровно по одному разу), при этом сам подсчет выполнен неверно – 3 балла.

Выписаны правильно все 84 числа в упорядоченном виде (видно что ничего не пропущено и нет лишнего – 7 баллов, что-то пропущено или лишнее или неупорядочено – 0 баллов.

2. Решите уравнение в целых числах: $19a^3 - 7b^2 = 2024$.

Ответ: решений нет (пустое множество).

Решение. _Первое решение._ Рассмотрим равенство между правой и левой частями уравнения в виде равенства остатков от деления на 7. В левой части уравнения выражение $(19a^3 - 7b^2)$ сравнимо с соответствующим остатком выражения $5a^3$. Правая часть имеет остаток 1 при делении на 7. Заметим, что куб целого числа при делении на 7 имеет остатками только три числа: $0, 1$ и 6. Тогда, всеми возможными остатками от деления на 7 выражения $5a^3$ являются числа $0, 2$ или 5. Тогда, делаем вывод о том, что остатки от деления правой и левой частей на число 7 различаются, а значит, равенство не может быть достигнуто на при каких целых a и b. Значит, целочисленных решений нет.

Второе решение. Рассмотрим разложение числа $2024 = 19 \cdot 3 + 7 \cdot 281$. Тогда уравнение можно записать в виде $19(a^3 - 3) = 7(b^2 + 281)$, откуда в силу взаимной простоты чисел 19 и 7, равенство правой и левой части последнего уравнения возможно только если выражение $(a^3 - 3)$ кратно 7, а $(b^2 + 281)$ кратно 19. Но так как куб целого числа при делении на 7 не даёт остатка 3 (остатки только $0, 1$ и 6), то первое условие не выполнено, следовательно равенство не возможно ни при каких целых a и b. Значит, целочисленных решений нет.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Обоснованно полученный ответ – 7 баллов. Уравнение приведено к одному из видов уравнения с разложением на множители и обоснованно предложено проверить равенство с помощью проверки кратности, однако дальнейшее продвижение в решении отсутствует – 1 балл. Приведены верные утверждения об остатках деления кубов и квадратов целых чисел (или соответствующей кратности) на числа 7, 19, но без продвижения в дальнейшем решении – дополнительно 2 балла.

3. Рассматриваются все трапеции площади 1, длины диагоналей которых d_1 и d_2, $d_1 \geq d_2$. Какова наименьшая возможная длина диагонали d_1 у таких трапеций? (Напомним, что трапецией является выпуклый четырехугольник, две стороны которого параллельны, две другие – не параллельны).

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. *Первое решение.* Рассмотрим трапецию как частный случай четырехугольника, для которого площадь можно посчитать с помощью формулы $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_2 \cdot \sin(\phi)$, где ϕ – угол между диагоналями, длины которых равны d_1 и d_2. Пусть, для определенности, одна из диагоналей d_1, не меньше, чем другая, то есть $d_1 \geq d_2$. Тогда верна следующая оценка в виде цепочки неравенств: $(\mathrm{d}_1)^2 \geq \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_2 = \frac{2\,\mathrm{S}}{\sin(\phi)} \geq 2\mathrm{S} = 2$, где значение $\sin(\phi)$ оценено сверху максимальным значением 1 при $\phi = 90°$. Следовательно, верно окончательно $(\mathrm{d}_1)^2 \geq 2$, откуда следует оценка длины большей диагонали: $\mathrm{d}_1 \geq \sqrt{2}$. Заметим, что крайнее значение $\sqrt{2}$ в оценке может достигаться при одновременно выполненных условиях $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2$ и $\phi = 90°$. Таким образом, если найдется пример такой трапеции, то ответом к задаче будет значение $\sqrt{2}$. Действительно, такая трапеция равнобокая существует: с высотой $h = 1$ и основаниями $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

Второе решение. Рассмотрим для выбранной произвольной трапеции величины проекций p_1 и p_2 двух диагоналей d_1 и d_2 на одну из двух прямых, на которых располагаются основания трапеции. Заметим, что сумма длин $(p_1 + p_2)$ этих проекций равна сумме $(a + b)$ длин двух оснований трапеции, а значит, по свойству проекций, $(d_1 + d_2) \geq (p_1 + p_2) \geq (a + b)$. Пусть, для определенности, одна из диагоналей d_1, не меньше, чем другая, то есть $d_1 \geq d_2$. Тогда, формула для площади трапеции $S_{\text{тр}} = \frac{(a+b)}{2} \cdot h = 1$, где h - величина высоты трапеции, дает оценку для величины диагонали в виде неравенства:

$$\frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{h}, \ \ p_1 \geq \frac{p_1 + p_2}{2} \ \Longrightarrow \ p_1 \geq \frac{(a+b)}{2} \ \Longrightarrow \ p_1 \geq \frac{1}{h}.$$

Так как $d_1^2 = p_1^2 + h^2$, то с учётом предыдущего верно также следующее неравенство:

$$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \left(\frac{1}{h}\right)^2 + h^2 \geq 2,$$

где последнее неравенство верно в силу суммы взаимно обратных чисел(неравенство между средними, неравенство Коши). Следовательно, $d_1 \geq \sqrt{2}$. Пример для $d_1 = \sqrt{2}$ вытекает из свойств неравенства о сумме взаимно обратных чисел(равенство верно для равных значений $\frac{1}{h} = h = 1$). Например, равнобокая трапеция с высотой $h = 1$ и основаниями $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$ имеет диагонали $d_1 = d_2 = \sqrt{2}$.

Замечания к оцениванию. Заметим, что вопрос в задаче предполагает выписывание числового значения и обоснования, что данное значение – наименьшее из всех возможных (тип задачи «оценка+пример»). Потому, оценка выполнения данного задания предполагает наличия в решении хотя бы одной из двух этих частей (оценка величины длины диагонали и пример такой трапеции, у которой такая диагональ найдётся). Заметим, что квадрат не является верным примером, так как формально не является трапецией. Ответ без обоснования и без приведенного примера – 0 баллов. Правильный пример без обоснования(оценки) – 2 балла. Обоснованно полученный ответ (оценка и пример) – 7 баллов. Обоснованная оценка величины большей диагонали без приведённого примера – 5 баллов.

4. Известно, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $x^4 - bx^3 + (c-2)x^2 + bx + 1 = 0$?

Ответ: 4 различных корня.

Решение. Рассмотрим свойства корней x_1, x_2 для заданного квадратного уравнения. По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = -b,\ x_1 \cdot x_2 = c$. Заменим теперь в уравнении 4-го порядка коэффициенты b и c через корни x_1, x_2 первого уравнения:

$$x^4 + (x_1 + x_2) \cdot x^3 + (x_1 \cdot x_2 - 2) \cdot x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + 1 = 0$$

и представим (разложим на множители) левую часть уравнения на два симметричных квадратичных выражения:

$$x^4 + (x_1 + x_2)x^3 + (x_1x_2 - 2)x^2 - (x_1 + x_2)x + 1$$
$$= (x^2 + x_1x - 1)(x^2 + x_2x - 1),$$

откуда корни уравнения 4-ой степени можно искать как решения двух квадратных уравнений: $x^2 + x_1x - 1 = 0$ и $x^2 + x_2x - 1 = 0$.

Действительно, оба полученных квадратных уравнения имеют по два корня, так как дискриминант у обоих строго больше нуля: $D_1 = x_1^2 + 4 > 0$, $D_2 = x_2^2 + 4 > 0$. Осталось показать, что все четыре корня различны. От противного, предполагая, что имеются общие корни у двух уравнений, составим систему:

$$\begin{cases} x^2 + x_1x - 1 = 0, \\ x^2 + x_2x - 1 = 0, \end{cases}$$

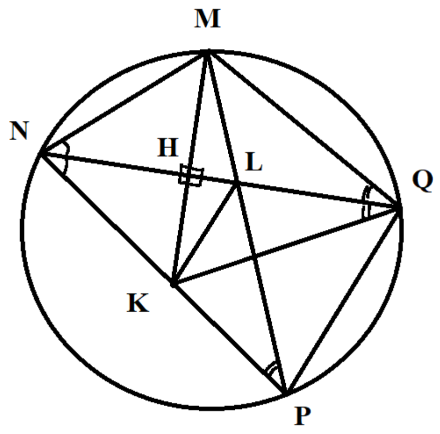
у которой в силу предположения имеется хотя бы одно решение. Тогда, вычитая из одного уравнения другое, получим как следствие условие: $x_1x - x_2x = 0$, которое имеет решение только при $x_1 = x_2$, что противоречит условию задачи. Следовательно, все четыре корня двух квадратных уравнений попарно различны. Итого, всегда 4 различных корня.

Решение могло проводиться с помощью замены переменной $t = x - \frac{1}{x}$, *которая очевидно следует после деления исходного уравнения на* x^2 *(x=0 тоже очевидно его корнем не является).*

Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется оценить количество различных корней уравнения 4-й степени. Для этого потребуется либо предъявить соответствующие корни и проверить их на совпадение, либо обосновать наличие определенного количества корней с помощью информации о существовании различных корней у заданного квадратного. Ответ без обоснования – 0 баллов. Уравнение 4-го порядка записано в симметричном виде через корни квадратного уравнения, или же выполнена замена переменных, дальнейшее продвижение отсутствует – 1 балл. Уравнение приведено к виду с разложением на множители или найдены все 4 корня уравнения 4-го порядка, анализа количества корней не приведено – 4 балла. Доказано утверждение, что все корни уравнения 4-го порядка попарно различны – дополнительно 2 балла.

5. В треугольнике MNP известно, что NP>MN. Биссектриса NL внутреннего угла треугольника пересекает окружность, описанную около треугольника

MNP, в точке Q. На отрезке NP выбрана точка K так, что NK=NM. Докажите, что около четырехугольника KPQL можно описать окружность.



Доказательство. Рассмотрим точку H как точку пересечения прямых NQ и MK. Треугольник MNK равнобедренный, так как по условию NK=NM. Следовательно, биссектриса угла N является одновременно медианой и высотой в треугольнике. Тогда, $NL \perp MK$, откуда в треугольнике MKQ отрезок QH является высотой и медианой, а значит, и биссектрисой угла при вершине Q в треугольнике. Тогда верно равенство углов HQM=HQK.

Рассматривая теперь угол NQM как вписанный в окружность и опирающийся на дугу MN, заметим, что на ту же дугу опирается и вписанный угол MPN, откуда верно двойное равенство углов NQM=HQK=MPN. Но это равенство углов ведёт к выполнению условия признака вписанности 4-хугольника KPQL в окружность, так как углы в равенстве LQK=LPK суть углы, под которыми видна сторона LK из вершин P и Q. Доказательство закончено.

Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется доказать вписанность некоторого четырёхугольника (в окружность). Поэтому, подойдет любой из известных признаков вписанного 4-хугольника(сумма противоположных внутренних равна 180, внешний равный противоположному внутреннему, равенство углов двух смежных вершин, из которых видна одна и та же противоположная сторона, антипараллельность сторон, использование метрических признаков и др.). Заметим также, что 4-хугольник MNKQ является ромбоидом, диагонали NQ и MK которого перпендикулярны и являются биссектрисами углов при соответствующих вершинах, откуда вытекают равенства нескольких пар углов и можно доказать вписанность KPQL с помощью различных эквивалентных формулировок признака. За альтернативные способы доказательства(могут быть доказательства, основанные на фактах, не описанных выше) баллы не снимать!

В решении обоснованно доказано утверждение задачи – 7 баллов. Недостаточно обоснованное решение, содержащее верный ход мысли оценивать с помощью одного из следующих критериев:

- доказано равенство углов NQK=MPN, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказано равенство углов NLK=KPQ, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказана антипараллельность прямых KL и QP, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказано, что NQ·NL=NP·NK, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла.

6. В классе учатся 20 учеников. Известно, что любые два ученика либо дружат друг с другом, либо не дружат. Если дружат – могут списать домашнее задание друг у друга, если не дружат – не могут. Учитель знает, что если хотя бы один ученик сделает домашнее задание, то к следующему уроку оно будет сделано у всех. Докажите, что можно выделить 6 учеников из этого класса так, что все остальные либо дружат с кем-то из этих шести, либо дружат с кем-то из друзей этих шести.

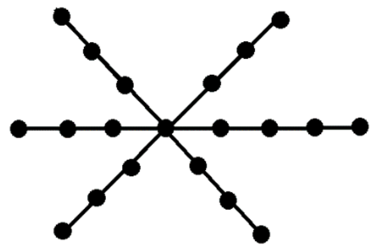
Доказательство. *Первое решение.* Заметим, что доказать нужно тот факт, что всех учеников можно разбить на 6 групп так, что в каждой группе найдется отмеченный ученик, такой, что либо дружит с любым другим в этой группе, либо дружит с его другом в этой группе. Задача состоит в обосновании возможности составить такое разделение класса на группы, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Для двух любых учеников А и В составим цепочку друзей $\mathrm{А} - \mathrm{Б}_1 - \mathrm{Б}_2 - \ldots - \mathrm{Б}_k - \mathrm{В}$ и будем её длиной считать число (k + 1) последовательных дружественных связей. Также, будем называть цепочку друзей $\mathrm{А} - \mathrm{Б}_1 - \mathrm{Б}_2 - \ldots - \mathrm{Б}_k - \mathrm{В}$, длина которой больше 1,замкнутой, если А дружит с В. Мы можем считать, что в классе нет замкнутых цепочек, так как, если разорвать любую из них, возникнет группа учеников со строго меньшим числом дружеских связей, для которого условие задачи останется в силе. Если для такого класса утверждение задачи будет доказано, то оно будет доказано и для исходного класса.

Выделим из учеников класса самую длинную цепочку друзей $А - Б_1 - Б_2 - \ldots - Б_k - В$. Если таких цепочек будет несколько, выберем любую из них. Если длина самой длинной цепочки меньше или равна 4, то все ученики из этой цепочки оказываются друзьями или друзьями друзей ученика $Б_2$.Пусть длина самой длинной цепочки больше или равна 5. Тогда сформируем подгруппу учеников, состоящую из $Б_2$ и тех его друзей и друзей друзей, которые не связаны с $Б_2$ через $Б_3$. Сам $Б_3$ тоже не попадает в эту подгруппу. Заметим, что количество учеников в сформированной группе не меньше 3. Для оставшихся учеников класса условие задачи по-прежнему выполнено, то есть любые два ученика, не вошедшие в выделенную подгруппу, могут быть соединены цепочкой друзей.

Будем проделывать указанную процедуру, пока будут находиться цепочки длиной не меньше 4. Заметим, что мы проделаем эту процедуру не более 5 раз. В итоге, число учеников, оставшихся не включёнными в какую-либо подгруппу, останется не больше, чем 20 – 3·5 = 5 учеников. Максимальная цепочка, составленная из них, уже имеет длину меньше 5. Таким образом, сформированных подгрупп не более 6. Если же подгрупп получилось меньше, то «добрать» выделенных учеников до 6 можно, взяв любых из оставшихся, это не противоречит условию задачи.

Второе решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются ученики, ребра графа – дружественная связь между парой учеников. Путём между двумя вершинами назовем набор вершин, последовательно соединённых соответствующими рёбрами. Длиной пути между двумя вершинами назовем количество рёбер в этом пути. Расстоянием между двумя вершинами графа будем называть наименьшую длину пути, соединяющего данные вершины. Из условия задачи следует, что граф связный. Если в графе есть циклы длины более 1, то можно удалением соответствующих рёбер сформировать из первоначального связного графа дерево(например, остовное). Заметим, что доказать нужно тот факт, что граф можно разбить на не более 6 подграфов или отдельных односвязных графов(например, удалением некоторых ребер) так, чтобы в каждом таком подграфе нашлась одна вершина, от которой до любой другой вершины подграфа расстояние будет не более 2. Процедуру деления дерева на подграфы будем проводить следующим образом. Пусть в первоначальном дереве есть максимальный путь длины не менее 5, например, соединяющий вершины А– $Б_1$– $Б_2$– $Б_3$ – … – $Б_k$ – В, $k \geq 4$, и пусть ребро А – висячая вершина. Тогда уберём ребро $Б_2$– $Б_3$, после чего получится двухсвязный граф, одна из двух компонент которого содержит путь А– $Б_1$– $Б_2$, а вторая компонента – вершину $Б_3$. Заметим, что первая компонента содержит не менее 3-х вершин, а вторая компонента является деревом. Продолжаем процедуру с выделением подграфа из второй компоненты, пока это возможно. Заметим, что таких шагов можно сделать не более пяти раз, соответственно получим не более 6-ти подграфов, удовлетворяющих условию задачи.



Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется произвести процедуру выделения групп учеников, соответствующих условиям задачи, причём, в условиях всех возможных комбинаций дружественных связей между учениками. Поэтому, решения, основанные на частных случаях таких комбинаций, оцениваются как 0 баллов. Заметим, что для проверки правильности решения(алгоритма выбора 6 учеников) можно принять во внимание один из «крайних» примеров исходного графа класса(см. рисунок) – для него нет возможности выделить менее 6 групп.

Полный обоснованный ответ (как с применением графов, так и без) оценивается в 7 баллов. Если доказательство недостаточно обоснованное или не полное, но содержащее верный ход мысли, некоторые обоснованные достижения можно оценивать с помощью следующих критериев:
- указана процедура отделения(образования) не более 6 групп учеников класса, удовлетворяющая условиям задачи, обоснование неполное или отсутствует – 3 балла.