Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2023 г.)

10 класс

1. Первый член геометрической прогрессии со знаменателем 2 равен 1. Может ли произведение нескольких первых членов этой прогрессии равняться 2^{2023}?

Решение. Произведение первых m членов такой геометрической прогрессии равно

$$1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{m-1} = 2^{m(m-1)/2}.$$

Поскольку уравнение $m(m-1) = 4046$ не имеет натуральных корней, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

Ответ: Нет, не может.

2. Докажите, что если $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=1$ **, то** $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$ **.**

Решение. Легко видеть, что $a+b+c \neq 0$

Умножим данное равенство почленно на $a+b+c$. Получим

$\dfrac{a(a+b+c)}{b+c}+\dfrac{b(a+b+c)}{c+a}+\dfrac{c(a+b+c)}{a+b}=a+b+c.$ Преобразуем первую дробь:

$\dfrac{a(a+b+c)}{b+c}=\dfrac{a^2}{b+c}+a.$

Преобразуем таким же образом два других слагаемых и перенесем все члены в левую часть. После приведения подобных слагаемых получим требуемое равенство.

Что и требовалось доказать.

3. Найдите наименьшее значение функции

$$z=\sqrt{x^2+y^2-8x-12y+52}+\sqrt{x^2+y^2+6x-4y+13}$$

Решение. Преобразуем выражение к виду:

$z=\sqrt{(x-4)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}.$

Геометрически эту функцию можно расценивать как расстояние от точки $M(x;y)$ до фиксированных точек $A(4;\ 6)$ и $B(-3;\ 2)$. Сумма расстояний будет наименьшей, если точка $M(x;y)$ лежит на отрезке AB. В самом деле, пусть $M(x;y)$ не лежит на отрезке AB, тогда имеем треугольник ABM. По неравенству треугольника $AM + MB > AB$, если же точка M принадлежит отрезку AB, то $AM + MB = AB$. Вычислим длину отрезка AB:

$z=\sqrt{(4+3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}.$

Ответ: $z_{min} = \sqrt{65}$

4. Пусть $S(n)$ – сумма цифр числа n, а $S(S(n))$ – сумма цифр суммы цифр числа n.

а) Существует ли натуральное n, такое, что $n + S(n) = 2000$?

б) Существует ли натуральное n, такое, что $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$?

Решение. а) Очевидно, число должно быть четырехзначным. Тогда $0 < S(n) \le 36$, а, значит, $1964 \le n < 2000$. Так как первые две цифры уже определены (их сумма $1 + 9 = 10$), то $10 < S(n) \le 28$. Следовательно, $1972 \le n < 1990$.

1) Пусть $n = 1970 + k$ $(2 \le k \le 9)$.

Тогда $1970 + k + 17 + k = 2000$. Но тогда k не натуральное число.

2) Пусть $n = 1980 + k$ $(0 \le k \le 9)$.

Тогда $1980 + k + 18 + k = 2000$. Получаем $k = 1$, и $n = 1981$.

б) Так как остаток от деления числа на 3 совпадает с остатком от деления на 3 суммы цифр этого числа, то левая часть равенства кратна трем при любом n. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть три случая: n кратно 3, n дает остаток 1 при делении на 3, n дает остаток 2 при делении на 3. Но правая часть числа (число 2000) не кратна 3, а значит, нет таких n, при которых выполнялось бы данное равенство.

Ответ: а) 1981, б) нет.

5. На координатной плоскости *Oxy* нарисована парабола $y = \frac{1}{2}x^2$. Прямая, проходящая через точку (0;2), пересекает параболу в точках *A* и *B*. Найдите величину угла *AOB*.

Решение. Точки *A* и *B* удовлетворяют системе $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = kx + 2 \end{cases}$.

Значит, абсциссы точек *A* и *B* являются корнями уравнения $x^2 - 2kx - 4 = 0$

$$OA^2 = (k^2+1)x_1^2 + 4kx_1 + 4;\ OB^2 = (k^2+1)x_2^2 + 4kx_2 + 4$$

$$AB^2 = (k^2+1)(x_2 - x_1)^2$$

По теореме косинусов для треугольника *AOB* косинус угла *AOB* равен 0, значит, искомый угол равен 90°.

Ответ: 90°.