МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Республика Бурятия

2023–2024 учебный год

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Улан-Удэ
2023

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ
И ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОЦЕНИВАНИЮ РАБОТ

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года в Республике Бурятия проводится по заданиям, подготовленным Региональной предметно-методической комиссией в единый для всех муниципалитетов день — **11 декабря 2023 г.** Муниципальный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 7, 8, 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 5 задач. Продолжительность олимпиады составляет **3 часа 55 минут**. Единое время начала олимпиады для всех муниципалитетов — **10:00** по местному времени.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 35.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

В случае отсутствия *специальных критериев* по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Решение верное, но имеются небольшие недочёты.
5–6	В целом верное решение, которое содержит ошибки, пропущенные важные случаи, не влияющие на логику решения.
3–4	Решение делится на две равноценные части, участником решена одна из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Важно отметить, что жюри НЕ снимает баллы за:

1) объём текста (важно также понимать, что сколь угодно длинный текст без содержательных продвижений никак НЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ);

2) почерк или способ оформления;

3) отличие решения участника от авторского.

Черновики работ не проверяются.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Региональная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников муниципалитетов.

10 КЛАСС

10.1. Действительные числа x, y, z, t удовлетворяют системе

$$\begin{cases} xy + xz + xt + yz + yt + zt = 1; \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2. \end{cases}$$

Какое минимальное и какое максимальное значения может принимать величина $x + y + z + t$?

Д. Минеев

Ответ. -2 и 2.

Решение. Умножим первое равенство в системе на 2 и сложим со вторым. Получим

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt = 4,$$

$$(x + y + z + t)^2 = 4,$$

$$x + y + z + t = \pm 2.$$

Теперь остается заметить, что $x + y + z + t = 2$ при

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 0,\ t = 0,$$

а $x + y + z + t = -2$ при

$$x = -1,\ y = -1,\ z = 0,\ t = 0.$$

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если не указано, при каких значениях выполняется $x + y + z + t = \pm 2$ — *не более 5 баллов.*

Только ответ — *0 баллов.*

10.2. На Новый Год магазин подарков украсил витрину гирляндой из $2n + 1$ лампочки. Все лампочки имеют попарно различные цвета, а первая и последняя лампочка не соединены напрямую. В новогоднюю ночь произошёл сбой: каждая лампочка поменяла свой цвет на цвет одной из своих соседок. Докажите, что теперь найдутся две лампочки одного цвета.

И. Двойнишников

Решение 1. Пусть после сбоя не нашлось двух лампочек одного цвета. Обозначим последовательно лампочки в гирлянде

$$l_1,\ l_2, \ldots, l_{2n+1},$$

а их цвета соответственно

$$c_1,\ c_2, \ldots, c_{2n+1}.$$

У лампочки l_1 соседкой является только лампочка l_2, значит, после сбоя у лампочки l_1 будет цвет c_2. У лампочки l_3 соседками являются l_2, l_4, значит, после сбоя у неё или цвет c_2, или c_4. Но цвет c_2 уже занят l_1, а лампочек с одинаковыми цветами у нас нет. Значит, у лампочки l_3 цвет c_4. Проделав аналогичные рассуждения для лампочек с номерами $5, 7, \ldots, 2n-1$, получаем, что после сбоя каждая из них поменяет цвет на цвет её следующей по номеру соседки. Для лампочки l_{2n+1} соседкой является только l_{2n}, значит, после сбоя лампочка l_{2n+1} получит цвет c_{2n}. В таком случае у лампочек l_{2n-1}, l_{2n+1} после сбоя один и тот же цвет, что является противоречием.

Решение 2. Занумеруем лампочки по порядку слева направо и их цветам присвоим те же номера. Заметим, что после сбоя каждая лампочка с нечётным номером поменяет свой цвет на цвет с чётным номером. Изначально цветов с чётным номером было всего n, а лампочек с нечётными номерами — $(n+1)$. Но это значит, что среди лампочек с нечётными номерами после сбоя найдутся хотя бы две лампочки одного цвета.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов*.

Если задача решена верно для какого-то фиксированного нечётного значения лампочек — *не более 3 баллов*.

Задача решена в предположении того, что лампочки изменили цвета каким-то определенным образом — *0 баллов*.

10.3. Можно ли на шахматной доске расставить несколько (больше 0) шахматных коней таким образом, чтобы каждый бил ровно четырёх других?

Ответ. Можно.

Решение. Например, можно расставить так:

			К				
	К				К		
		К	К	К			
К		К		К		К	
		К	К	К			
	К				К		
			К				

Замечание. Опишем несколько соображений, которые могут привести к примеру. Первое, что стоит понять — коней в потенциальном примере должно быть довольно много. Как минимум 5, а на самом деле куда больше, так как 5 коней, конечно, не могут попарно друг друга бить. Далее полезно иметь в виду, что шахматная доска — довольно симметричный объект, так что на помощь могут прийти центральная и осевая симметрии (по отдельности или сразу обе). Ещё одна хорошая мысль — строить пример «по кругу», т.е. таким образом, чтобы он переходил сам в себя при вращении на некоторый угол. В задаче на это указывает то, как ходит конь: он может «ходить кругами» по доске, причём сразу несколькими способами. Отметим ещё одну полезную мысль: у коней, стоящих недалеко от границы доски есть меньше клеток, которые они бьют, а потому, вероятно, их будет не очень много.

Критерии.

Предъявлен верный пример — *7 баллов*.

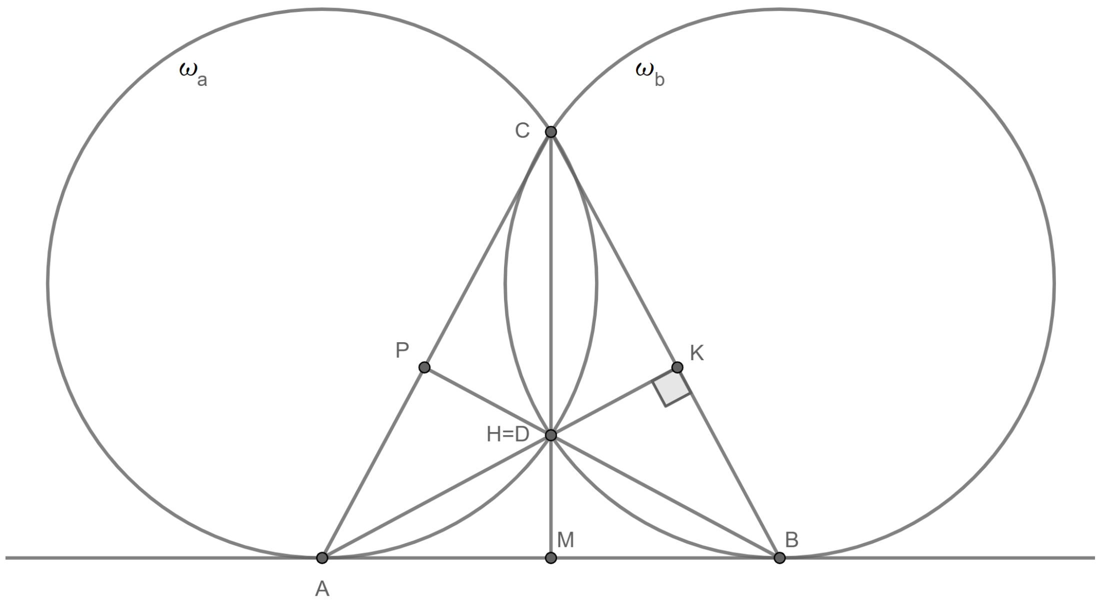
За отсутствие объяснения того, как участник этот пример придумал, *баллы не снимаются*.

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности ω_a и ω_b, проходящие через точку C, касаются прямой AB в точках A и B соответственно. Пусть D — вторая точка пересечения ω_a и ω_b. Найдите отношение радиусов окружностей ω_a и ω_b если известно, что прямые AD и BC перпендикулярны.

Д. Минеев

Ответ. 1.

Решение. Обозначим за K пересечение прямых BC и AD, за M пересечение прямых CD и AB, за H ортоцентр $\triangle ABC$, за P пересечение прямых BH и AC.



Дважды применяя теорему о касательной и секущей, получаем

$$MA^2 = MD \cdot MC = MB^2 \Rightarrow MA = MB,$$

то есть CM — медиана в $\triangle ABC$.

Дважды применяя теорему об угле между касательной и хордой, имеем

$$\angle DAB = \angle DCA,\ \angle DBA = \angle DCB,$$

откуда

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 180^\circ - \angle DCA - \angle DCB = 180^\circ - \angle ACB.$$

Так как H — ортоцентр $\triangle ABC$, то AP — его высота.

$$\angle AHB = \angle KHP = 360^\circ - \angle CPH - \angle CKH - \angle PCK = 180^\circ - \angle ACB = \angle ADB.$$

Так как AD и BC перпендикулярны и треугольник ABC остроугольный, то точка H лежит на отрезке AK. Заметим, что если точка H лежит во внутренности отрезка AD, то $\angle AHB > \angle ADB$, а если во внутренности DK, то $\angle AHB < \angle ADB$. Но никакой из этих случаев не выполняется, а значит, $H = D$. Тогда CM — высота $\triangle ABC$ и одновременно его медиана. Значит, он равнобедренный. Следовательно, при симметрии относительно прямой CM треугольник

$\triangle ADC$ перейдёт в $\triangle BDC$, значит, они равны, а значит, равны и радиусы описанных около них окружностей ω_a и ω_b соответственно.

Критерии.

Полное верное доказательство — *7 баллов.*

Доказано, что CM — медиана в $\triangle ABC$ — *1 балл.*

Доказано, что $\angle ADB = \angle AHB$ — *2 балла.*

Доказано, что точки H и D совпадают — *1 балл.*

Последние три критерия суммируются.

10.5. На кухне ресторана работают $n > 3$ поваров, каждый из которых умеет готовить несколько блюд, при этом каждое из имеющихся в меню 48 блюд умеют готовить ровно трое из них. Шеф-повару необходимо так составить график работы для своей команды, чтобы у каждого повара в один из дней недели был выходной. Докажите, что это можно сделать так, чтобы для любого блюда в любой день недели на кухне был повар, который умеет его готовить.

Д. Минеев

Решение 1. Рассмотрим какое-нибудь блюдо A. Назовём график работы *плохим* для A, если в какой-то из дней недели при этом графике работы на кухне не найдётся повара, который умеет готовить A.

Заметим, что для того, чтобы график работы был *плохим* для A необходимо и достаточно, чтобы все три повара, умеющие его готовить, отдыхали в один день. Выбрать этот день есть 7 способов. Для остальных поваров, не умеющих готовить это блюдо, способов выбрать выходной есть 7^{n-3}. Таким образом, для каждого блюда есть ровно 7^{n-2} *плохих* графиков работы. Значит, суммарно графиков работы, для каждого из которых существует блюдо, для которого этот график *плохой*, не больше $48 \cdot 7^{n-2}$.

При этом всего графиков работы 7^n. Так как

$$7^n = 49 \cdot 7^{n-2} > 48 \cdot 7^{n-2},$$

то найдётся график, который не будет *плохим* ни для какого блюда. Значит, для соответствующего графика работы нет блюда, которое в какой-то из дней недели некому готовить. Этот график нам и подходит.

Приведем еще одно решение на языке теории графов. Подчеркнём, что это решение содержательно почти не отличается от предыдущего и во многом является лишь переводом рассуждений предыдущего решения в другие термины (быть может, более удобные).

Решение 2. Рассмотрим двудольный граф G такой, что вершинами первой его доли будут блюда из меню, вершинами второй — всевозможные варианты составления графика работы, а ребро между вершинами будет проведено тогда и только тогда, когда для соответствующего блюда при соответствующем варианте графика работы в какой-то из дней недели не найдётся повара, который умеет его готовить.

Заметим, что для того, чтобы из блюда было проведено ребро в вариант графика работы необходимо и достаточно, чтобы все три повара, умеющие его готовить, отдыхали в один день. Выбрать этот день есть 7 способов. Для остальных поваров, не умеющих готовить это блюдо, способов выбрать выходной есть 7^{n-3}. Таким образом, из каждого блюда выходит ровно 7^{n-2} рёбер. Значит, сумма степеней вершин первой доли равна $48 \cdot 7^{n-2}$. Тогда сумма степеней вершин второй доли также равна $48 \cdot 7^{n-2}$. Так как у каждого повара есть 7 вариантов для выходного дня, то количество вершин во второй доле равно 7^n. Поскольку

$$48 \cdot 7^{n-2} < 49 \cdot 7^{n-2} = 7^n,$$

то во второй доле найдётся вершина степени 0. Значит, для соответствующего графика работы нет блюда, которое в какой-то из дней недели некому готовить. Этот вариант графика нам и подходит.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

В решении в том или ином виде содержится идея подсчёта количества графиков работы — *1 балл.*

В решении в том или ином виде содержится идея сравнить количество не подходящих графиков работы с общим количеством графиков работы — *2 балла.*

Доказано, что не подходящих графиков работы не больше $48 \cdot 7^{n-2}$ — *4 балла.*

В решении, которое формулируется на языке графов, вычислена степень каждой вершины первой доли (или сумма степеней вершин в первой доле) — *4 балла.*

Баллы за указанные пункты НЕ суммируются.