Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023/2024 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 10 класс

$\boxed{\textbf{10.1}}$ *На клетчатом листе нарисован квадрат 7×7. Можно ли его клетки покрасить в три цвета так, чтобы в каждой строке и каждом столбце были клетки всех трёх цветов, но обязательно в разном количестве?*

Решение: Это возможно. Приведём один из примеров:

1	2	2	3	3	3	3
3	1	2	2	3	3	3
3	3	1	2	2	3	3
3	3	3	1	2	2	3
3	3	3	3	1	2	2
2	3	3	3	3	1	2
2	2	3	3	3	3	1

Критерии:

- Если правильного примера нет, но участник показал, что распределение количества чисел в строках и столбцах 1/2/4 — 1 балл;
- Приведён правильный пример — 7 баллов.

$\boxed{\textbf{10.2}}$ *Найдите такое наименьшее n, что какие бы n последовательных целых чисел ни взять, произведение всех их попарных сумм будет делиться на 2023.*

Решение 1: Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$. Если взять десять чисел 0, 1, 2, …, 9, то среди их попарных сумм будут только числа от 1 до 16 и одна сумма равна 17, поэтому произведение не поделится на 17^2. Это означает, что чисел нужно брать хотя бы 11, т.е. $n \geqslant 11$. Покажем, что одиннадцати чисел всегда достаточно. Предположим противное. Поделим каждое из них с остатком на 17, получится 11 неповторяющихся чисел от 0 до 16. Пары остатков, которые дают в сумме 17 – это $(1, 16)$, $(2, 15)$, $(3, 14)$, …, $(8, 9)$. Если у нас не более одной из попарных сумм разделилось на 17, то в каждой из указанных пар для нашего набора существует не более одного остатка, кроме, может быть, одной пары. Но тогда всего чисел не более $7 + 2 + 1 = 10$ (семь пар дают максимум одно число, одна пара даёт два числа и ещё число с остатком 0). Противоречие. Делимость на 7 одной из попарных сумм очевидна, потому что среди остатков от деления на 7 одиннадцати подряд идущих чисел есть все числа от 0 до 6.

Решение 2: Оценка снизу такая же. Докажем, что одиннадцати чисел всегда достаточно. Достаточно явно перебрать 17 вариантов остатка первого из этих чисел и показать, что в любом случае найдутся две пары чисел с суммой, кратной 17. Мы не будем здесь приводить этот конечный перебор, но решение учащихся на его основе этого требует.

Критерии:

- Доказано, что $n \geqslant 11$ — 2 балла;
- Доказано, что одиннадцати чисел хватает — 5 баллов.

$\boxed{\mathbf{10.3}}$ *Найти все такие многочлены $P(x)$, которые при всех положительных x удовлетворяют тождеству*

$$P(x+1) = P(x) + 2P(\sqrt{x}).$$

Решение: Сделаем замену $x = t^2$, тогда $P(t^2+1) = P(t^2) + 2P(t)$. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0.$$

Предположим, что $n > 2$. Тогда $P(t^2+1) = a_n t^{2n} + (na_n + a_{n-1})t^{2n-2} + ...$, а $P(t^2) + 2P(t) = a_n t^{2n} + a_{n-1}t^{2n-2} + ...$ (потому что $2n - 2 > n$). Получились разные коэффициенты при t^{2n-2}. Противоречие, значит $n \leqslant 2$. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, подставим в равенство. Получим:

$$at^4 + (2a+b)t^2 + (a+b+c) = P(t^2+1) = P(t^2) + 2P(t) = at^4 + (2a+b)t^2 + 2bt + 3c.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях, выводим $b = 0$, $a = 2c$. Поэтому искомые многочлены имеют вид $2cx^2 + c$, где c – любое число.

Критерии:

- Показано, что многочлен $P(x)$ является чётным — 1 балл;
- Показано, что подходят многочлены $2cx^2 + c$ или какой-либо их частный ненулевой случай (например, $2x^2 + 1$) — 2 балла;
- Доказано, что $n \leqslant 2$ — 5 баллов.

$\boxed{\mathbf{10.4}}$ *Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка E, что*

$$\angle AEB + \angle CED = 180^\circ.$$

Докажите, что $\angle EBC = \angle EDC$.

Решение: Построим параллелограмм $ABFE$. Тогда $AE||BF$, $AD||BC$, а поэтому $\angle EAD = \angle FBC$. Тогда $\triangle EAD = \triangle FBC$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $\angle BFC = \angle AED$. Заметим, что из $\angle AEB + \angle CED = 180^\circ$ следует $180^\circ = \angle AED + \angle BEC = \angle BFC + \angle BEC$. Поэтому $EBFC$ – вписанный четырёхугольник, откуда $\angle EBC = \angle EFC$, но $\angle EFC = \angle EDC$, так как $EFCD$ – параллелограмм (по построению EF и CD равны и параллельны.)

Критерии:

- Проведено дополнительное построение до вписанного четырёхугольника — 3 балла.

$\boxed{\mathbf{10.5}}$ *Чудак выписал в строку* 21 *число, среди которых число* 0 *встречается один раз ровно посередине, а каждое из чисел от* 1 *до* 10 *по два раза. Могло ли так оказаться, что для любого натурального n от* 1 *до* 10 *между двумя числами n в этой последовательности ровно $n-1$ другое число?*

Решение: Любую указанную расстановку чисел с нулём по центру можно получить из любой другой такой, применяя несколько раз в каком-то порядке две операции: 1) поменять местами два рядом стоящих ненулевых числа; 2) поменять местами два числа, соседние с 0. Заметим, что при этих операциях не изменяется чётность суммы расстояний между одинаковыми числами. Если за исходную расстановку взять $1\ 2\ 3\ \dots\ 10\ 0\ 1\ 2\ 3\ \dots\ 10$, то сумма расстояний между одинаковыми числами есть $10 \cdot 10 = 100$, а сумма расстояний, которую мы бы хотели получить по условию задачи, $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$. Они имеют разную чётность, поэтому получить желаемую расстановку нельзя.

Критерии:

- Ответ без доказательства — 0 баллов.