Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2023 – 2024 учебный год
Математика
10 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

10.1. На листе бумаги построили параболу − график функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$, $b > 0$ и $c < 0$, а оси координат стёрли (см. рис. 1). Как они могли располагаться?

Рис.1

(Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы.)

Ответ: см. рис. 2.

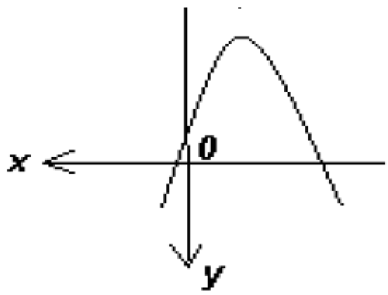

Рис.2

Решение. Так как $a > 0$, то ветви параболы “раскрыты” вдоль положительного направления оси ординат. Так как с < 0, то точка пересечения графика с осью ординат имеет отрицательную ординату. Так как $-\frac{b}{2a}<0$, то вершина параболы находится в полуплоскости x < 0.

Комментарий:

приведен верный рисунок без пояснений, либо верный рисунок с верными пояснениями − **7 баллов,**

приведен верный рисунок, к которому даны пояснения, содержащие ошибки − **5 баллов,**

приведен верный рисунок без пояснений, либо верный рисунок с верными пояснениями, но на нем изменена ориентация системы координат (поворот от луча OX к лучу OY осуществляется по часовой стрелке) − **5 баллов,**

приведен верный рисунок, но изменено положение параболы (она перевернута) − **1 балл,**

рисунок неверен, но правильно направлена ось ординат − **1 балл,**

задача не решена или решена неверно − **0 баллов.**

10.2. На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 2019. Каковы были два остальных числа?

Ответ: 2025 и 2031.

Решение. Заметим, что 9 - 3 = 6 и 1 5 - 9 = 6. Покажем, что в любой момент одно из чисел на доске будет на 6 меньше второго и на 6 больше третьего.

Действительно, пусть это свойство выполнено, и на доске записаны числа x - 6, x, x + 6. Если сложить два крайних числа и вычесть среднее, то тройка чисел не изменится. Если сложить первых два числа и вычесть третье, то получится тройка x - 6, x, x - 12, а если сложить два последних числа и вычесть первое, то получится тройка x + 12, x, x + 6. Во всех случаях указанное свойство сохраняется, поэтому

оно будет выполняться после каждого шага. Значит, искомые числа: 2019 + 6 = 2025 и 2025 + 6 = 2031.
Ту же идею решения можно изложить иначе: например, можно показать, что тройки, которые могут получиться, образуют «цепочку», и каждый раз мы делаем по этой цепочке шаг вперёд или шаг назад (или остаёмся на месте).
Комментарий:
приведены верный ответ и полное обоснованное решение − **7 баллов,**
приведен верный ответ и указано без доказательства свойство, которое является инвариантом − **3 балла,**
приведен только ответ − **0 баллов.**

10.3. Сравните величины углов BAC и CED (см. рис.3). Свой ответ обоснуйте.

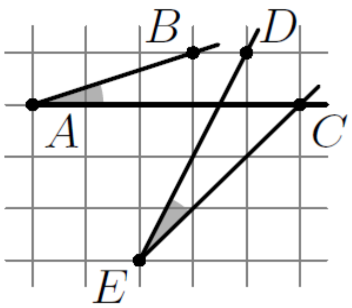

Рис.3

Ответ: эти углы равны.
Решение. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из B на AC.

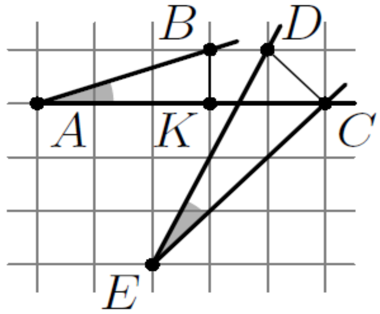

Рис.4

Рассмотрим треугольники ABK и EDC. Они оба прямоугольные, причем их катеты относятся как 1:3. Значит, тангенсы отмеченных углов равны 1/3, то есть сами углы тоже равны.
Комментарий:
любое верное решение − **7 баллов.**
приведён только верный ответ − **0 баллов.**

10.4. 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и Вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но Вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.
Решение. Сначала переложим все фонарики в правую коробку, не трогая выключатели. Далее переложим из правой коробки в левую любые сто

фонариков, переключая при этом каждый, и цель будет достигнута. Докажем это.
При перекладывании (с переключением) одного фонарика разность между количествами горящих фонариков справа и слева уменьшается на 1. Действительно, если мы взяли фонарик, который не горел, зажгли его и переложили налево, то справа количество горящих фонариков не изменилось, а слева оно увеличилось на 1. Если же мы взяли горящий фонарик, погасили его и переложили налево, то справа количество горящих уменьшилось на 1, а слева оно осталось прежним. В тот момент, когда все фонарики находились в правой коробке, рассматриваемая разность равна 100, значит, после стаперекладываний она станет равной нулю, что и требуется.
Существуют и другие алгоритмы действий.
Комментарий:
приведено полное обоснованное решение − **7 баллов**,
приведен верный алгоритм, но его обоснование неполно (например, сказано, что разность горящих фонариков будет уменьшаться на 1, но не объяснено, почему) − **3 балла,**
приведен только верный алгоритм без всяких объяснений − **1 балл,**
задача не решена или решена неверно − **0 баллов.**

10.5. Через точку P проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рис.5). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

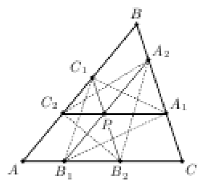

Рис.5

Решение. Заметим, что $SA_2B_2C_2 = SA_2C_2P$+SB_2C_2P+SA_2B_2P, а $SA_1B_1C_1$=SA_1C_1P + +SB_1C_1P + SA_1B_1P. Докажем, что SA_2C_2P = SA_1C_1P (для других пар площадей равенство доказывается аналогично). Это можно доказать различными способами.
Первый способ. Поскольку C_2PA_2B — трапеция, то SC_2A_2P=SBA_2P . Так как BC_1PA_2 — параллелограмм, то SBA_2P = SBC_1P. И, наконец, из того, что BC_1PA_1 — трапеция, получим, что SBC_1P = SA_1C_1P. Следовательно, SA_2C_2P = SA_1C_1P , что и требовалось
Второй способ. Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек A_2 и C_1 на отрезок A_1C_2. Тогда $SC_2A_2P = \frac{1}{2}C_2P \cdot A_2X$ и $SC_1A_1P = \frac{1}{2}PA_1 \cdot C_1Y$. Треугольники C_2C_1P и PA_2A_1 подобны (соответствующие стороны параллельны), поэтому $C_1Y : A_2X = C_2P : PA_1$, следовательно, SA_2C_2P = SA_1C_1P.

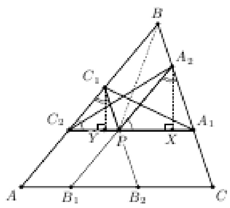

Рис.5
Существуют и «вычислительные» решения. Приведем одно из них.

Третий способ. Докажем, что $S_{B_2AC_2} + S_{C_2BA_2} + S_{A_2CB_2} = S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}$ (см. рис. 4). Не теряя общности, можно считать, что площадь треугольника ABC равна 1. Пусть $AB_2 : B_2C = p : (1 - p)$, $CA_2 : A_2B = q : (1 - q)$, а $BC_2 : C_2A = r : (1 - r)$. Тогда, используя отношение площадей треугольников с общим углом, получим, что $S_{B_2AC_2} = p(1 - r)$, $S_{C_2BA_2} = r(1- q)$, $S_{A_2CB_2} = q(1- p)$. То есть, $S_{B_2AC_2}+S_{C_2BA_2}+S_{A_2CB_2} = p + q + r - pr - pq - rq$.
Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $AB_1: AC = 1 - q$, $AC_1: AB = p$ и $BA_1 : BC = r$. Следовательно, $S_{B_1AC_1}+S_{C_1BA_1}+S_{A_1CB_1} = (1-q)p + r(1-p) + q(1-r) = p+q+r-pr-pq-rq$, что итребовалось.
Комментарий:
приведено полное обоснованное решение **– 7 баллов,**
присутствует идея рассмотрения равновеликих треугольников (см. первый и второй способы) или идея подсчета дополнения до треугольника (см. третий способ), но доказательство не доведено до конца или содержит ошибку **– 1 балл,**
задача решена в конкретном частном случае, например, равностороннего треугольника, или рассмотрено конкретное расположение точки P (например, точка пересечения медиан) **– 0 баллов,**
задача не решена или решена неверно **– 0 баллов.**

Интернет-ресурсы:
http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru, https://siriusolymp.ru/mathematics.

4. Сравните величины углов BAC и CED (см. рисунок). Свой ответ обоснуйте.