МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖИ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ
КРЫМСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ ПОСТДИПЛОМНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2023-2024 гг. МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

10 КЛАСС

Задание 10.1. (7 баллов)

Найти сумму чисел $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2024}$, если имеет место тождество

$$a_{2024} \cdot x^{2024} + a_{2023} \cdot x^{2023} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 x + a_0 = \frac{(x-2024)(x-2023)\cdots(x-1)}{2024!}$$

Ответ: 1011,5

Решение.

Пусть x $= 1$. Тогда $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2024} = 0$

Пусть x $= -1$. Тогда $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots - a_{2023} + a_{2024} = 2025$

Пусть x $= 0$. Тогда $a_0 = 1$.

Отсюда

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2024}) = 2025$$

И

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2024} = 1011{,}5$$

Ответ: 1011,5

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное обоснованное решение
5	Правильное решение с вычислительной ошибкой
2	Найдены значения при x $= 0;\ 1;$ -1, но дальнейшего решения нет.
0	Приведён только ответ или задача не решена

Задание 10.2. (7 баллов)

На концах отрезка стоят числа 2023 и 2024. Отрезок разбивают на n частей. Каждой точке разбиения в произвольном порядке присваивают значения 2023 или 2024. Может ли в результате этого получиться ровно 366 отрезков с разными значениями на концах (считаем только «маленькие отрезки», не содержащие внутри других отрезков или точек).

Ответ: Невозможно. Число таких отрезков нечетно.

Решение.

Будем перекрашивать отрезок в красный цвет, если он удовлетворяет условиям задачи, а если не удовлетворяет - в синий.

Когда мы ставим первую точку, мы всегда получаем один отрезок синий и один красный.

Каждая следующая точка падает или на синий или на красный отрезок. Если на красный, то независимо от того какое значение имеет новая точка, один из новых отрезков будет синий, а один - красный. Если новая точка делит синий отрезок и имеет значение, отличное от его концов, то оба новых отрезка будут перекрашены в красный цвет. Если новая точка имеет то же значение, что и значения на концах синего отрезка, то оба новых отрезка останутся синими.

Таким образом, четность числа красных отрезков не меняется на каждом новом шаге. При этом, первый шаг приводит нас к одному такому отрезку. Следовательно, разбив отрезок на n частей, мы получим нечетное число красных отрезков, то есть отрезков с различными значениями на концах.

Ответ: Невозможно. Число таких отрезков нечетно.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Есть последовательность шагов, которая приводит к верному решению, но решение не завершено или недостаточно обосновано.
0	Приведен только ответ. Нет верного решения.

Задание 10.3. (7 баллов)

Сравните числа $10^{\sqrt{11}}$ и $11^{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\mathbf{10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}}$.

Решение.

Возведем неравенство в степень $\sqrt{11}$.

Сравним 10^{11} и $11^{\sqrt{110}}$. Заметим, что $\sqrt{110} < 10{,}5$.

Рассмотрим 10^{22} и 11^{21}. Докажем, что $10^{22} > 11^{21}$:

$$10 \cdot 2^{21} \cdot 125^{7} > 121^{10} \cdot 11$$

$$10 \cdot 2^{21} \cdot \left(\frac{125}{121}\right)^{7} > 121^{3} \cdot 11$$

Используем неравенство Бернулли:

$$\left(\frac{125}{121}\right)^{7} = \left(1 + \frac{4}{121}\right)^{7} \geq 1 + 7 \cdot \frac{4}{121} > 1{,}1$$

Докажем, что

$$10 \cdot 2^{21} \cdot 1{,}1 > 121^{3} \cdot 11$$

Разделим на 11. Так как

$(2^{7})^{3} > 121^{3}$ или $128^{3} > 121^{3}$, то

$$10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\mathbf{10^{\sqrt{11}} > 11^{\sqrt{10}}}$.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	В доказательстве пропущены несущественные этапы
1	Есть схема доказательства, без доказательства промежуточных этапов
0	Приведен только ответ

Задание 10.4. (7 баллов)

Правильный треугольник ABC вписали в окружность радиуса 2023. В него вписали окружность, и в новую окружность вписали треугольник, вершины которого - точки касания ABC и вписанной в него окружности. Эту процедуру проделали 50 раз. Найти сумму площадей всех сегментов, которые отсекаются треугольниками от описывающих их окружностей.

Ответ: $\boldsymbol{2023^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\frac{4}{3}(1-2^{-100})}$

Решение.

Заметим, что на каждом шаге размер окружности и треугольника уменьшается в два раза. Поэтому суммарные площади троек сегментов образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{4}$.

Суммарную площадь первой тройки сегментов S_1 можно получить, как разность между площадью круга и площадью треугольника:

$$S_1=\pi 2023^2-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2023^2=2023^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Сумма первых 50 членов прогрессии равна

$$\mathrm{S}=2023^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{50}-1}{\frac{1}{4}-1}=2023^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\frac{4}{3}(1-2^{-100})$$

Ответ: $\boldsymbol{2023^2\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\frac{4}{3}(1-2^{-100})}$

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Задача решена полностью
4	Задача решена, но в вычислениях допущена ошибка
2	Прописана идея построения геометрической прогрессии
0	Задача не решена

Задание 10.5. (7 баллов)

Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существуют натуральные числа x, y, u, v, удовлетворяющие уравнениям

$$(x+y)(x+y+20)=(140-a)(a-80)$$

и

$$a(8u^2+2v^2-a)=(4u^2-v^2)^2$$

Ответ: 100

Решение.

Рассмотрим вначале второе уравнение. Перенесем обе части в одну сторону и рассмотрим квадратное уравнение относительно а.

Тогда:

$$a_{1,2} = (4u^2 + v^2) \pm \sqrt{16u^4 + 8u^2v^2 + v^4 - 16u^4 + 8u^2v^2 - v^4}$$
$$= (4u^2 + v^2) \pm \sqrt{16u^2v^2} = (4u^2 + v^2) \pm 4uv$$

$$\left[\begin{aligned} a_1 &= (2u - v)^2 \\ a_2 &= (2u + v)^2 \end{aligned}\right.$$

Итак, a_1 и a_2 являются квадратами натурального числа.

Рассмотрим теперь первое уравнение:

$$(\mathrm{x} + \mathrm{y})(\mathrm{x} + \mathrm{y} + 20) = (140 - \mathrm{a})(\mathrm{a} - 80)$$

Так как правая часть положительна при натуральных x, y, то и левая часть должна быть больше 0. Следовательно $\mathrm{a} \in (80;\ 140)$.

Таким образом, возможны три значения a: 81, 100, 121.

Подставляем последовательно эти значения в первое уравнение. Условие натуральности x и y выполняется только при $\mathrm{a} = 100$.

Ответ: 100

Критерии оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное обоснованное решение.
4	Рассмотрен только один случай $\mathrm{a} = 100$ полностью, а случаи $\mathrm{a} = 81$ и $\mathrm{a} = 121$ только констатированы.
1	Дана только схема рассуждения, без математических выкладок и обоснований
0	Приведен только ответ