10 класс – 2023

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Может ли сумма каких-то семи подряд идущих натуральных чисел быть равна сумме квадратов каких-то трёх подряд идущих натуральных чисел?

Решение. ДА, например: $8+9+10+11+12+13+14 = 77 = 4^2+5^2+6^2$, $32+33+34+35+36+37+38 = 245 = 8^2+9^2+10^2$, … (достаточно привести любой верный пример).

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Приведён верный пример – 7 баллов.

10.2. Числа $a, b, c > 0$. Докажите, что $a/c + c/b \geq 4a/(a+b)$.

1-е доказательство. $a/c + c/b \geq 4a/(a+b) \leftrightarrow (ab + c^2)(a+b) \geq 4abc \leftrightarrow a^2b + ab^2 + ac^2 + bc^2 \geq 4abc \leftrightarrow (a^2b - 2abc + bc^2) + (ab^2 - 2abc + ac^2) \geq 0 \leftrightarrow b(a-c)^2 + a(b-c)^2 \geq 0$.

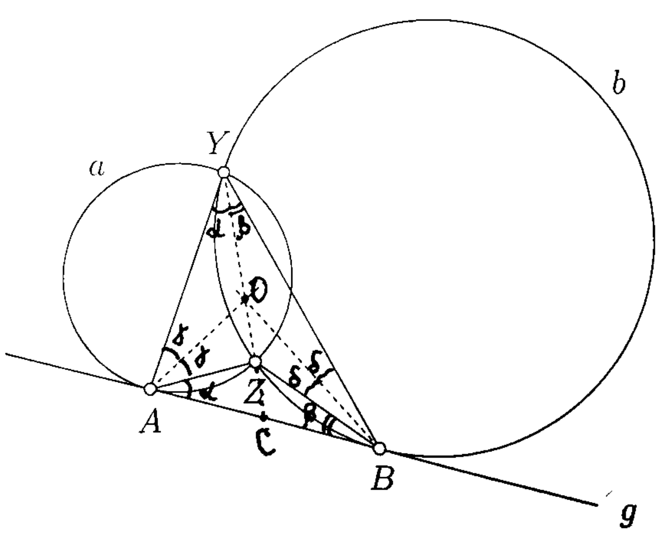
2-е доказательство. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем: $a/c + c/b \geq 2 \cdot \sqrt{(a/c)\cdot(c/b)} = 2 \cdot \sqrt{a/b}$. Потому достаточно проверить выполнение неравенства $2 \cdot \sqrt{a/b} \geq 4a/(a+b)$. Проверка: $2 \cdot \sqrt{a/b} \geq 4a/(a+b) \leftrightarrow 4a/b \geq 16a^2/(a+b)^2 \leftrightarrow 1/b \geq 4a/(a+b)^2 \leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ – верно.

10.3. Найдите все такие целые положительные и с одинаковым количеством цифр числа a и b, для которых выполнено равенство $2a \cdot b = a*b$ (здесь $a*b$ означает число, которое получается, если к числу a приписать справа число b; например, если $a = 20$, $b = 23$, то $a*b = 2023$).

Ответ: $a = 3$, $b = 6$ или $a = 13$, $b = 52$.

Решение. Обозначим за n количество цифр числа b. Тогда $2a \cdot b = 10^n \cdot a + b$, $b = 10^n \cdot a/(2a-1) = 2^{n-1} \cdot 5^n + 2^{n-1} \cdot 5^n/(2a-1)$. Так как b – целое, а $(2a-1)$ – нечётное, то $(2a-1)$ является делителем числа 5^n. Поэтому $2a-1 \leq 5^n$, $10^{n-1} \leq a \leq (5^n+1)/2$, $5^{n-1} \cdot (2^n-5) \leq 1$. Последнему неравенству удовлетворяют только $n = 1$ и $n = 2$, так как при $n \geq 3$ правая часть не меньше 75. При $n = 1$ получаем $2a-1 = 5$, $a = 3$, $b = 6$. При $n = 2$ получаем $2a-1 = 25$, $a = 13$, $b = 52$.

Комментарии. Только верный ответ – 1 балл. Доказано, что при $n \geq 3$ решений нет – 2 балла. Потеря на последнем шаге одного из ответов при полном решении – 4 балла.



10.4. Окружности a и b пересекаются в точках Y и Z и касаются прямой g в точках A и B соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов YAZ и YBZ лежит на прямой ZY .

Доказательство. Обозначим за O точку пересечения биссектрис углов YAZ и YBZ и за C – точку пересечения прямых YZ и AB . В соответствии с условием задачи обозначим углы так, как на рисунке. Достаточно проверить, что $\angle ACO = \angle ACY$. Так как сумма $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta$ углов треугольника YAB равна 180^0 , то сумма $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ острых углов треугольника OAB равна 90^0, и, следовательно, $\angle AOB$ – прямой . По теореме о секущей и касательной $CA^2 = CZ \cdot CY = CB^2$, поэтому CA = CB . Тогда OC – медиана к гипотенузе AB , OC = AC и $\angle ACO = 180^0 - 2\alpha - 2\gamma = \angle ACY$.

Комментарии. Доказано, что $\angle AOB$ – прямой – 2 балла.

10.5. Можно изменить порядок следования чисел 1, 2, 3, 4 , расставив их, например, так: 4, 1,3, 2 . Найдите все такие натуральные числа $n \geq 2$, для которых существуют расстановки $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ чисел 1, 2, 3, … , n такие, что попарные суммы $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots, a_n+b_n$ образуют ряд последовательных натуральных чисел.

Ответ: это возможно тогда и только тогда, когда n нечётно.

1-е доказательство.

Оценка. Пусть $a_1+b_1 = k$, $a_2+b_2 = k+1, \dots, a_n+b_n = k+n-1$. Тогда $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n) = nk+n(n-1)/2$. С другой стороны, $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n) = 2(1+2+\dots+n) = n(n+1)$. Из равенства $nk+n(n-1)/2 = n(n+1)$ получаем $k = (n+3)/2$ и, следовательно, n нечётно.

Пример. При любом нечётном n складывая почленно последовательности 1, (k+2), 2, (k+3), … … , 2k, k, (2k+1), (k+1) и (k+1), 1, (k+2), 2, … , (k-1), 2k, k, (2k+1) , получаем следующий ряд последовательных натуральных чисел: (k+2), (k+3), (k+4), (k+5), … , (3k-1), 3k, (3k+1), (3k+2) .

2-е доказательство. Пусть $a_k + b_k = c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Запишем последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n$ в виде $t - s, t - s + 1, \dots, t + s$ при нечетном n и $t - s, t - s + 1, \dots, t + s - 1$ при четном n . В первом случае сумма всех элементов равна $(2s + 1)t = n(n + 1)$. Тогда последовательность начинается с числа $n + 1 - (n - 1)/2 = 1 + (n + 1)/2$ и заканчивается числом $n + 1 + (n - 1)/2 = (n + 1)/2 + n$. Элементы такой последовательности можно получить из чисел $a_k = b_k = k$ следующим образом: $c_1 = a_1 + b_{(n+1)/2}$, $c_2 = a_{(n+3)/2} + b_1$, $c_3 = a_2 + b_{(n+3)/2}$, $c_4 = a_{(n+5)/2} + b_2$, …, $c_{n-1} = a_n + b_{(n-1)/2}$, $c_n = a_{(n+1)/2} + b_n$. При четном n сумма элементов последовательности c_k равна $s(2t - 1) = n(n + 1)$, где $n = 2s$. Тогда $2t - 1 = 4s + 2$. Это уравнение не имеет решений в целых числах.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Только верный пример – 3 балла. Только верная оценка – 4 балла.