Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023-2024 учебный год, 10 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

10 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

10.1. Из какого наименьшего количества слагаемых, являющихся простыми числами, можно получить сумму 2023?

Решение:

Оценка. Допустим из двух можно, тогда одно из слагаемых, должно быть числом 2, так как это единственное чётное простое число, остальные – нечётные. Второе слагаемое тогда – 2021, но $2021 = 43 \cdot 47$, то есть составное. Получаем противоречие, значит необходимо больше слагаемых.

Пример из трёх: $2023 = 2 + 23 + 1999$.

Ответ: Из трёх.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи	7
2. Сделаны пример и оценка, но наглядно не показано, что 2021 – составное число.	6
3. Сделана полная оценка, но пример не корректен или отсутствует.	4
4. Сделана только оценка, но наглядно не показано, что 2021 – составное число.	3
5. Показан верный пример из трёх слагаемых без оценки.	3
6. Неверное решение.	0

10.2. Известно, что $f(x) = 5x^2 - 5x + 1$, а также $f\big(f(x)\big) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где a, b, c, d и e – некоторые числа. Найдите значение выражения $a + b + c + d$.

Решение:

1) $f(0) = 1 \ \Rightarrow f\big(f(0)\big) = f(1) \ \Rightarrow a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = a + b + c + d + e$, с другой стороны $f(1) = 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = 1$. Значит $a + b + c + d + e = 1$.
2) $f(x) = 0$ имеет решение x_0, так как $D = (-5)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 5 > 0$. Значит, $f\big(f(x_0)\big) = f(0) = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = e$. $f(0) = 5 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$. Получается, что $e = 1$.
3) $a + b + c + d + e - e = 1 - 1 = 0$.

Ответ: $a + b + c + d = 0$.

Критерии	*баллы*
1. Полное решение задачи. *Возможно альтернативное решение, в котором участник будет находить композицию функций, приводить подобные слагаемые и получать коэффициенты через тождественные преобразования.*	7
2. В решении не объяснено, что $f(x)$ может быть равно 0, в остальном верно. *В целом верное решение, но есть не полностью обоснованные моменты.*	5
3. Доказано, что $a+b+c+d+e=1$, без дальнейших продвижений. *В преобразованиях допущена критическая ошибка, повлиявшая на конечный результат, при исправлении которой, решение становится верным.*	3
4. В работе рассматривается подставление каких-либо значений в многочлен, без получения вменяемых результатов. *В работе рассматривается подставление выражения $f(x)$ в качестве аргумента в себя, без получения вменяемых результатов.*	1
5. Неверное решение.	0

10.3. Какова доля десятизначных чисел, имеющих где-то в записи «20232024», среди всех десятизначных чисел, которые можно составить, не используя никаких цифр, кроме: 2, 0, 3 и 4?

Решение:

1) Количество всех таких чисел: $3 \cdot 4^9$(для всех, кроме одного разряда, допустимо по 3 цифры).
2) Посчитаем количество чисел с «20232024» в записи. Заменим «20232024» на объект «А», тогда необходимо разместить объект «А» и ещё 2 какие-то цифры на три места.
   Возможное взаимное расположение: (А,_,_), (_,А,_) и (_,_,А).
   Если объект «А» стоит первым, тогда количество вариантов 4^2, если нет – $3 \cdot 4$ для каждого. В каждом из расположений нет общих вариантов, так как 20 в начале и 24 в конце не дают им совпасть. Итого $4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 40$.
3) Получается доля $\frac{40}{3\cdot 4^9} = \frac{10}{3\cdot 4^8}$.

Ответ: $\frac{10}{3\cdot 4^8}$

Критерии	баллы
1. Полное решение задачи	7
2. Верно посчитано количество чисел и формула для расчёта, но ответ округлён.	6
3. В целом верное решение, но не объяснено, почему при разном расположении «20232024» не будет общих вариантов чисел.	6

4. Верно посчитано количество вариантов с «20232024» в записи, в остальном – неверно.	4
5. Верно посчитано общее количество чисел, в остальном – неверно.	2
6. Неверное решение.	0

10.4. Прямоугольный треугольник разделён на два других высотой, проведённой из прямого угла. В каждый из получившихся треугольников вписали окружность. Докажите, что прямая содержащая отрезок, соединяющий центр одной из вписанных окружностей и ближайшую к ней вершину острого угла исходного треугольника, находится под углом, кратным 45^o, к прямой, содержащей отрезок, соединяющий центр другой вписанной окружности и вершину прямого угла исходного треугольника.

Решение:

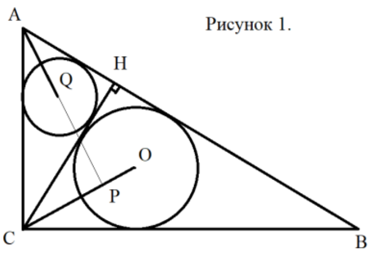

Рисунок 1.

Случай1.(вершина острого угла соединена с центром вписанной окружности находящимся с одной стороны от высоты)

Введём обозначения вершин, как показано на рисунке 1.

Пусть $\angle ACH = \alpha$, тогда $\angle CAH = 90^o - \alpha$ (ΔACH – прямоугольный). $\angle CAQ = \frac{90^o - \alpha}{2} = 45^o - \frac{\alpha}{2}$ (AQ – биссектриса $\angle CAH$). $\angle BCH = 90^o - \alpha \Rightarrow \angle OCH = \frac{90^o - \alpha}{2} = 45^o - \frac{\alpha}{2}$ (AO – биссектриса $\angle BCH$). $\angle ACP = \angle ACH + \angle OCH = \alpha + 45^o - \frac{\alpha}{2} = 45^o + \frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим углы треугольника ACP.

$$\angle APC = 180^o - \angle CAQ - ACP = 180^o - \left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(45^o + \frac{\alpha}{2}\right) = 90^0 \Rightarrow AQ \perp CO,$$

что соответствует требуемому.

Случай 2. (вершина острого угла соединена с центром вписанной окружности находящимся с другой стороны от высоты)

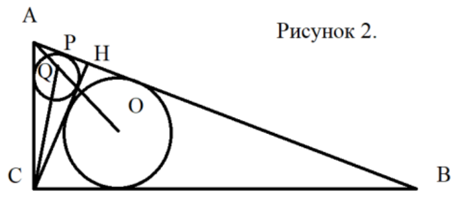

Рисунок 2.

Введём обозначения вершин, как показано на рисунке 2, где P – точка пересечения CQ и AO (Q и O – центры вписанных окружностей).

Пусть $\angle BAC = 2\alpha$, тогда $\angle ACH = 90^o - 2\alpha$.

$\angle CAP = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle ACP = 45^o - \frac{\alpha}{2}$, так как AO и CQ – биссектрисы. $\angle CPO = \angle CAP + \angle ACP = \frac{\alpha}{2} + 45^o - \frac{\alpha}{2} = 45^o$(внешний угол в ΔAPC), что и требовалось показать.

Альтернативное решение для случая 1:

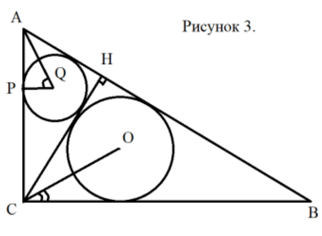

Рисунок 3.

Введём обозначения вершин, как показано на рисунке 3.

1) Покажем, что Q, ближе к A, чем O. (см. решение №1)

2) Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle PAQ = \frac{\alpha}{2}$ (AQ – биссектриса $\angle CAB$) и $\angle ABC = 90^o - \alpha$. $\angle BCH = 90^o - (90^o - \alpha) = \alpha$ ($\Delta BCH -$ прямоугольный). $\angle BCO = \frac{\alpha}{2}$ (CO – биссектриса $\angle BCH$). $\angle AQP = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ ($\Delta APQ -$ прямоугольный).
$PQ \parallel BC,$ так как обе перпендикулярны AC. Таким образом AQ и CO наклонены к параллельным прямым под разнонаправленными углами, дающими в сумме 90^o. То есть они перпендикулярны между собой.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Доказано, что $AQ \perp CO$.(случай 1)	4
Доказано, что $\angle CPO = 45^o$.(случай 2)	3
Неверное решение.	0

10.5. В некотором классе 20 учащихся. Каждый из них написал на уроке по одной записке десяти своим одноклассникам. Докажите, что найдётся 10 пар учащихся, написавших друг другу записки.

Решение:

Всего возможных пар учащихся $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$. Всего написанных записок $20 \cdot 10 = 200$.

Таким образом, на 190 пар учащихся приходится лишних 10 записок, и их придётся распределить на пары, в которых уже написана записка. В паре может быть написано не более двух записок, значит лишние 10 штук будет распределено по различным парам учащихся.

Критерии	*баллы*
Полное решение задачи.	7
Доказано, что 10 записок лишние, без внятного вывода.	4
Посчитано количество пар учащихся без дальнейших продвижений.	1
Неверное решение.	0