Критерии и ключи проверки муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников в Республике Карелия в 2023–2024 учебном году по математике

10 класс

№1 (7 баллов). На доске представлен комплект из 2023 чисел такой, что при замене каждого числа в комплекте суммой остальных чисел получается такой же комплект (возможно, с другим порядком чисел). Найдите произведение всех чисел данного комплекта.

Ответ. 0

Решение. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ – данный комплект чисел, а S – их сумма. По условию, для каждого числа a_i из комплекта число $S - a_i$ также принадлежит этому комплекту. Следовательно, $(S - a_1) + (S - a_2) + \dots + (S - a_{2023}) = S$, откуда $2023S - S = S$, следовательно, $S = 0$. Последнее означает, что для каждого числа из комплекта противоположное ему число тоже принадлежит этому комплекту. Но так как в комплекте нечетное число чисел, то одно из них является противоположным самому себе, то есть число 0 принадлежит комплекту. Следовательно, произведение всех чисел данного комплекта равно 0.

<u>*Критерии:*</u>

- Верно составлена математическая модель задачи, но либо дальнейшее решение отсутствует, либо в решении имеются ошибки – 4 балла
- Полное решение – 7 баллов.

№2 (7 баллов). Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Известно, что его коэффициенты *a, b, c* являются положительными числами и образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Докажите, что если исходное уравнение имеет корни, то любой его корень является отрицательным.

Решение.

Первый способ. Пусть d – разность прогрессии. Т.к. арифметическая прогрессия возрастающая, то $d > 0$. Тогда $b = a + d$, $c = a + 2d$ и уравнение примет вид $ax^2 + (a + d)x + a + 2d = 0$, или $a(x^2 + x + 1) + d(x + 2) = 0$.

Квадратичная функция $x^2 + x + 1$ принимает только положительные значения, числа a и d тоже положительные, и если $x + 2$ неотрицательно, то левая часть уравнения будет положительной. Следовательно, если уравнение имеет решение x_0, то $x_0 + 2 < 0$. То есть x_0 - отрицательное.

Критерии:

- Исходная задача сведена к решению уравнения $a(x^2 + x + 1) + d(x + 2) = 0$, но дальнейшие рассуждения отсутствуют или ошибочны – 3 балла.
- При дальнейшем продвижении в решении задачи установлено, что первое слагаемое $a(x^2 + x + 1)$ в левой части уравнения всегда положительно – 5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

Второй способ. Определим, при каких условиях на коэффициенты a и d уравнение $ax^2 + (a + d)x + a + 2d = 0$ имеет решение.

Имеем, $D = (a+d)^2 - 4a(a+2d) = d^2 - 6ad - 3a^2 \geq 0$.

Решая последнее неравенство относительно отношения $t = \dfrac{d}{a} > 0$, получим $d \geq \left(3 + 2\sqrt{3}\right)a$. Следовательно, абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + (a + d)x + a + 2d$, равная $-\dfrac{a+d}{2a} \leq -\dfrac{a + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)a}{2a} = -\left(2 + \sqrt{3}\right) < 0$, а значение функции $y(0)=a+2d>0$. Поэтому если уравнение имеет решение, то все они лежат левее точки 0, то есть отрицательны по знаку.

Критерии:

- Отражено условие, при котором квадратное уравнение имеет решение ($D\geq 0$), но дальнейшие рассуждения отсутствуют или ошибочны – 1 балл.
- Определено, при каких условиях на коэффициенты a и d уравнение $ax^2+(a+d)x+a+2d=0$ имеет решение ($d\geq(3+2\sqrt{3})a$) – 4 балла.
- Установлено, что вершина параболы лежит левее -*2* – 5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

№3 (7 баллов). В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник *ABM*, быть в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник *ACM*?

Ответ. Не может.

Решение. Пусть r_1 – радиус вписанной окружности в треугольник *ABM*, r_2 – радиус вписанной окружности в треугольник *ACM.* Предположим, что указанное в условии соотношение между r_1 и r_2 имеет место.

Тогда, учитывая, что треугольники *ABM* и *ACM* имеют одинаковую площадь, из формулы $S=p\cdot r$ получим:

$$(AB+BM+MA)\cdot 2r_2=(AC+CM+MA)\cdot r_2.$$

То есть периметр треугольника *ACM* в два раза больше периметра треугольника *ABM*: $AC+CM+MA=2(AB+BM+MA)$. Откуда: $AC=BM+MA+2AB$.

Учитывая равенство $BM = MC$ (AM – медиана), имеем: $AC = CM + MA + 2AB$. Согласно неравенству треугольника ACM ($CM + MA > AC$) получаем противоречие. Значит, радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, не может быть в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM.

Критерии:

- Исходя из предположения о верности соотношения между радиусами r_1 и r_2, установлено, что периметр треугольника ACM в два раза больше периметра треугольника ABM – 3 балла.
- Полное решение – 7 баллов.

№4 (7 баллов). Десять лунок расположены по кругу. В девяти из них лежит по одиннадцать камней. Одна пустая. Камни можно перекладывать по лункам по следующим правилам: выбирается лунка (в ней должно быть не менее шести камней) и направление перекладывания (по или против часовой стрелки). Из выбранной лунки выбирают шесть камней и раскладывают по ближайшим лункам в выбранном направлении – в самую ближайшую три камня, в следующую – два, в следующую – один. Докажите, что не удастся получить такое расположение камней, при котором во всех лунках по одиннадцать камней, кроме той, что расположена напротив первоначально пустой.

Решение.

Чтобы увидеть разницу между начальной и требуемой позициями покрасим лунки в черный и белый цвет через одну, начиная с первоначально пустой. Если это сделать, то можно увидеть, что противоположные лунки имеют различные цвета. Таким образом, в требуемой позиции в лунках черного цвета на одиннадцать камней больше, чем в начальной позиции.

Рассмотрим, как меняется число камней в черных лунках за ход. Если рассыпаются камни из черной лунки, то в черных лунках в сумме становится на 6-2=4 камня меньше, если рассыпаются из белой – то в черных становится на четыре больше. То есть после любого числа ходов разница между начальным и конечным числом камней в черных лунках будет кратна четырем. Но одиннадцать на четыре не делится – приходим к противоречию, которое и показывает, что требуемая позиция недостижима из начальной.

Критерии:

- Установлено, что после любого числа ходов разница между начальным и конечным числом камней в черных лунках будет кратна четырем – 4 балла.
- Полное верное решения – 7 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 28.