РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

2023

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. *Найдется ли такое четырехзначное натуральное число* n*, что для записи всех трех четырехзначных чисел* n*,* n*+1 и* n*+2 достаточно трех различных цифр?*

Ответ. Найдется. ***Решение.*** Например, 1111 или 9988. Есть и другие примеры.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 2. *В 10 клетках сидят 25 животных — зайцев и кроликов. Известно, что если в клетке есть заяц, то там не больше одного кролика, а если в клетке есть кролик, то там не больше одного зайца. Докажите, что есть клетка, в которой все животные — одной породы.*

Решение. Допустим, клетки, где все животные одной породы, нет. Тогда в каждой клетке есть и зайцы и кролики. Но в такой клетке по условию не больше одного зайца и не больше одного кролика, то есть в ней ровно два животных. Однако, в таком случае всего у нас 20 животных, а не 25. Противоречие.

Задача 3. *Найдутся ли такие пять различных натуральных чисел* a, b, c, d, e*, что среди дробей* a/b, a/c, a/d, a/e, b/c, b/d, b/e, c/d, c/e, d/e *девять сократимы, а одна несократима?*

Ответ. Найдутся. ***Решение.*** Например, 2, 6, 10, 14, 105. Несократима дробь 2/105, остальные сократимы.

• Любой верный пример — *7 баллов*. Проверка не обязательна.

♦ Такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, что среди дробей a_i/a_j ($i > j$) есть ровно одна несократимая, найдутся для любого натурального $n \geq 3$. Достаточно взять $n–1$ различных простых чисел $p_1, \ldots, p_{n-1}$ и положить $a_1 = p_1$, $a_2 = p_1p_2$, …, $a_{n-1} = p_1p_{n-1}$, $a_n = p_2\ldots p_{n-1}$. Единственной несократимой будет дробь a_1/a_n. Мы построили наш пример, взяв $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.

Задача 4. *Докажите, что удвоенная сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата его третьей стороны.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. По неравенству треугольника $a+b > c$, откуда $a^2+b^2+2ab > c^2$. Кроме того, $a^2+b^2 \geq 2ab$. Значит, $2a^2+2b^2 > c^2$. ***Замечание.*** Неравенство $a^2+b^2+2ab > c^2$ следует также из теоремы косинусов.

Задача 5. *Шестиугольник* ABCDEF*, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что если* AB < DE*, то* BC > EF*.*

Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины B и C лежат с одной стороны от прямой AD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, откуда $BC \parallel EF$, и $AB \parallel CF \parallel DE$. По условию треугольники ABC и DEF имеют равные площади, то есть $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = DE \cdot EF \cdot \sin\angle DEF$. Так как $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$, $\sin\angle ABC = \sin\angle DEF$. Значит, $AB \cdot BC = DE \cdot EF$, и поскольку $AB < DE$, то $BC > EF$, что и требовалось доказать.

• Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения —*не снижать оценку*.

Задача 6. *Что больше: число способов разложить все 19 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 19 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так все 20 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 20 г?*

Ответ. Число способов разложить 20 гирек. ***Решение.*** Пусть 19 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 19 г разложены на две чашки весов так, что весы в равновесии. Переложим гирьку весом 10 г на другую чашку весов, а на ее место положим гирьку весом 20 г. Обе чашки потяжелели на 10 г, и равновесие сохранилось. Таким образом, каждому равновесному раскладу гирек весом от 1 до 19 г соответствует по описанному правилу некоторый равновесный расклад гирек весом от 1 до 20 г, причем разным раскладам, очевидно, соответствуют разные. Поэтому равновесных раскладов гирек весом от 1 до 19 г не больше, чем равновесных раскладов гирек весом от 1 до 20 г. То, что равновесных раскладов гирек весом от 1 до 20 г строго больше, следует из того, что среди них есть расклады, в которых гирьки весом 10 г и 20 г находятся на одной чаше весов, например, когда гирьки весом 10, 20, 13, 14, 15, 16, 17 г на одной чашке и остальные гири — на другой.