Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2023 – 2024 учебном году

10 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. На всемирный конгресс съехалось 2023 математика. Оказалось, что среди любых пяти из них найдется по крайней мере один, знакомый со всеми остальными из этой пятерки. Можно ли отсюда заключить, что на конгрессе присутствует математик, знакомый со всеми участниками конгресса?

Ответ. Да, утверждение справедливо.

Решение. Докажем методом от противного: пусть у каждого математика есть хотя бы один незнакомый ему участник конгресса. Тогда, поскольку число участников нечетное, найдется математик А, у которого не менее двух незнакомых на конгрессе (пусть это математики Б и В) – в противном случае всех присутствующих можно было бы разбить на пары «незнакомцев», а при 2023 участниках это невозможно.

Заметим, что тогда любые два из оставшихся 2020 математиков знакомы между собой, в противном случае эти двое вместе с А, Б и В образовывали бы пятерку, противоречащую условию.

Возьмем двух любых из этих оставшихся 2020 математиков, например, Ю и Я. Хотя бы один из них знаком со всеми из тройки А, Б и В (иначе пятерка А, Б, В, Ю, Я противоречила бы условию) – а поскольку по предыдущему он знаком и с каждым из остальных участников конгресса – он знаком со всеми его участниками.

Комментарий. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов. Доказано существование участника с двумя «незнакомцами» – 3 балла.

2. Докажите, что $\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}} > 19700$.

Решение.

Преобразуем каждое из слагаемых:

$$\frac{n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n^2+1}{n+1}.$$

Для доказательства неравенства оценим каждое слагаемое снизу:

$$\frac{n^2+1}{n+1}>\frac{n^2-1}{n+1}=n-1.$$

Тогда

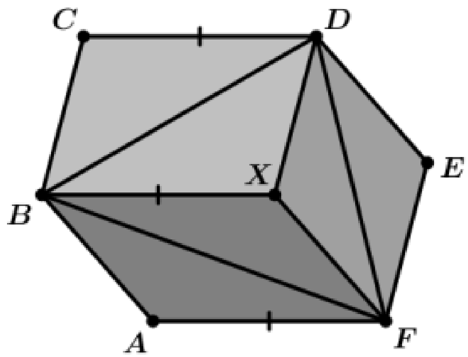
$$\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}}>0+1+2+\cdots+198=\frac{0+198}{2}\cdot 199=19701,$$

следовательно, $\frac{1+\frac{1}{1}}{1+\frac{1}{1}}+\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\frac{3+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\cdots+\frac{199+\frac{1}{199}}{1+\frac{1}{199}}>19700$.

Комментарий. Получена базовая оценка – 2 балла.

3. В выпуклом шестиугольнике ABCDEF противоположные стороны параллельны и равны. Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.

Решение. Докажем, что площади обоих треугольников равны половине площади шестиугольника, из этого будет следовать утверждение задачи.



Для этого отметим такую точку X, что четырехугольник ABXF является параллелограммом. Тогда отрезки AF и BX равны и параллельны. Но отрезки AF и CD также равны и параллельны, поэтому четырехугольник BCDX является параллелограммом. Аналогично DEFX параллелограмм. Тогда площади треугольников ABF и XBF, BCD и BXD, DEF и DXF равны. Но треугольники XBF, BXD и DXF составляют треугольник BDF. Таким образом, площадь треугольника BDF равна половине площади исходного шестиугольника.

Комментарий. Построено обоснованное разбиение шестиугольника на параллелограммы – 3 балла. Сформулирована идея о равенстве площадей треугольников половине площади шестиугольника – 2 балла.

4. При каких натуральных n число 2^n+1 является степенью тройки?

Ответ. При n=1 и n=3.

Решение. Проверим, что для n=1 условие выполнено: $2^1+1=3^1$. Теперь будем искать другие решения, считая $n\geqslant 2$.

Пусть $2^n+1=3^k$ для $n\geqslant 2$ и некоторого натурального числа k. Число 2^n делится на 4, поэтому левая часть при делении на 4 даёт остаток 1. Значит, и правая часть 3^k даёт остаток 1 при делении на 4. Заметим, что $3\equiv(-1)(mod\ 4)$ – то есть при нечётном k число 3^k всегда даёт остаток 3 при делении на 4, а при чётном k – остаток 1. Следовательно, k чётно. Тогда

$$2^n = 3^k-1 = (3^{k/2}-1)(3^{k/2}+1).$$

Числа $3^{k/2}-1$ и $3^{k/2}+1$ − последовательные чётные числа. Из предыдущего равенства следует, что они оба являются степенями двойки (иначе в их произведении будет содержаться «посторонний» простой делитель). Их разность равна 2 и не делится на 4, поэтому хотя бы одно из них не делится на

4 и при этом является степенью двойки. Следовательно, оно равно 2, а второе (большее) число равно 4. Тогда $3^{k/2} - 1 = 2$, откуда k=2, и $2^n = 8$, поэтому n=3.

Комментарий. Дан правильный ответ без доказательства полноты решения – 1 балл. Доказана чётность степени k – 3 балла.

5. Докажите, что число sin 18° является корнем уравнения $4x^2 + 2x = 1$.

Решение. По формулам приведения $\sin(3\cdot18°) = \cos(2\cdot18°)$, то есть, обозначив $\sin18° = x$, получим:

$\sin(3\cdot18°) = 3\sin18° - 4\sin^3 18° = 3x - 4x^3$ (формула синуса тройного угла может быть получена из формулы синуса суммы $\sin3x=\sin(2x+x)$),

$\cos(2\cdot18°) = 1 - 2\sin^2 18° = 1 - 2x^2$.

Пришли к уравнению $3x - 4x^3 = 1 - 2x^2$. Полученное уравнение можно записать в виде $(4x^2 + 2x - 1)(x - 1) = 0$. Поскольку $x \neq 1$, то $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Комментарий. Использован факт, что $90° = 3\cdot18° + 2\cdot18°$ – 1 балл. Из тригонометрических соображений построено алгебраическое уравнение – 4 балла. Приведена геометрическая интерпретация задачи – 3 балла, дано полное решение на основании геометрической интерпретации – 7 баллов.