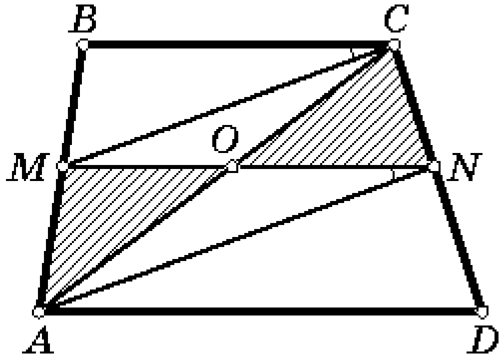
10 класс

1. Число 2023 поделили с остатком на все числа от 1 до 2023. Сколько разных остатков в результате получилось?
   Ответ: 1012.
   Решение. Все остатки от 1011 до 0 (именно в таком порядке) встретятся при делении 2023 на числа от 1012 до 2023. Все остальные остатки не больше делителя, так что заведомо не больше 1011.

2. У Саши несколько палочек по 5 и 6 см. Суммарная длина палочек – 6 метром. Докажите, что из всех палочек можно сложить правильный десятиугольник.
   Решение. Пусть палочек длины 5 см – x штук, а палочек длины 6 см – y шт. Тогда 5x+6y=600. Тогда получаем, что x делится на 6, а y делится на 5. Тогда палочки длиной 5 см можно разложить в кучки по шесть палочек, а палочки длиной 6 см в кучки по 5 палочек. Сумма длин палочек в каждой кучке 30 см. Из них собираем 10 кучек по 60 см.

3. Дана трапеция *ABCD* с основаниями $AD = a$ и $BC = b$. Точки *M* и *N* лежат на сторонах *AB* и *CD* соответственно, причём отрезок *MN* параллелен основаниям трапеции. Диагональ *AC* пересекает этот отрезок в точке *O*. Найдите *MN*, если известно, что площади треугольников *AMO* и *CNO* равны.



   Ответ $\sqrt{ab}$
   Решение. Добавив к равновеликим треугольникам *MOA* и *CON* (см. рис.) треугольник *AON*, получим, что треугольники *AMN* и *ACN* также равновелики. Они имеют общее основание *AN*, а значит, точки *M* и *C* равноудалены от прямой *AN*. А поскольку они, очевидно, лежат по одну сторону от этой прямой, прямые *MC* и *AN* параллельны.
   Имеем две пары подобных треугольников *MCN* и *AND* (а значит, $AD : MN = AN : MC$) и *MCB* и *ANM* (откуда $AN : MC = MN : BC$). Стало быть, $AD : MN = MN : BC$, откуда $MN^2 = AD\cdot BC = ab$.

4. На доске написаны 100 целых чисел. За одну операцию можно любое число увеличить на разность каких-то двух других чисел. Какое наибольшее количество одинаковых чисел всегда можно получить?
   Ответ: 99.
   Решение. Заметим, что если изначально не все числа равны, то 100 равных чисел получить не получится, так как последним ходом мы делаем 100 равных из ситуации 99 равных и 1 отличающееся, прибавляя к отличающемуся 0.
   Докажем, что 99 можно всегда.
   Будем всегда выбирать два самых больших не равных числа и их разность прибавлять к любому оставшемуся числу, не равному максимальному. Заметим, что число, к которому мы прибавляем эту разность, не может стать больше максимального. (Пусть два наибольших числа это $a < b$, c - число, к которому мы приавили разность b-a, тогда новое число – это $c + b – a \leq b$, так как $c \leq a$). Значит, если изначально на доске максимальное число было равно N, то после наших операций всегда все числа будут не превосходить N. Но так как сумма чисел постоянно растет хотя бы на 1, так как числа целые, то в какой-то момент мы не сможем сделать нашу операцию. Это значит, что 99 чисел стали равны N.

5. В стране 2023 города, между некоторыми из них есть автобусные маршруты (между любыми двумя городами не более одного маршрута, все маршруты двусторонние). По стандартам, на любые четыре города должно приходиться хотя бы три маршрута между ними, а также от любого города можно доехать до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно объехать все города в стране на автобусах, не заезжая ни в один город дважды.
   Решение. Рассмотрим некоторый путь из A в B, проходящий по некоторым городам по одному разу. Пусть есть хотя бы два города C и D, на входящие в этот путь. Посмотрим четверку городов A, B, C, D так как между ними есть хотя бы 3 дороги, то A или B связан дорогой с C или D. Мы можем удлинить путь. Будем так делать, пока не получим путь длиной 2022.
   Пусть концы этого пути X и Y, и Z – город, не входящий в этот путь и он не связан дорогой ни с X, ни с Y, но он связан хотя бы с одним из оставшихся городов. Если между X и Y есть дорога, тогда можно объехать 2022 города по кольцу и потом поехать в Z.
   Если между ними нет дороги. Рассмотрим четверку городов X, Y, Z, Q (Q - любой город). Так как между X, Y, Z нет дорог, то Q соединен со всем этими городами. Значит Z соединен со всеми городами, кроме X и Y. Пусть E и F два соседних города в пути между X и Y. Тогда по всем городам можно проехаться так: из X до E, из E в Z, из Z в F, из F до Y.