Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2023/24 уч.г.
Математика, 10 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

10.1. Графики квадратных трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке $(2;-8)$. Найдите старший коэффициент трёхчлена $f(x)+g(x)$, если известно, что он имеет единственный корень, равный 6.
Ответ. -1.
Решение. Так как трёхчлен $f(x)+g(x)$ имеет единственный корень, равный 6, то его можно представить как $a(x-6)^2$, где a – это как раз и есть искомый старший коэффициент. Кроме того, значение трёхчлена в точке 2 равно сумме значений трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$, то есть -16. Значит, $a\cdot(-4)^2=16$, откуда $a=-1$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Правильный ответ, обоснованный конкретным примером – 2 балла. Только ответ – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.2. Дано выражение $S=ab+bc+ca$, где a,b,c – целые числа. Если число a увеличить на 1, а числа b и c уменьшить на 2, то значение выражения S не изменится. Докажите, что число $(-1)\cdot S$ – квадрат целого числа.
Решение. По условию $ab+bc+ca=(a+1)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a+1)$, откуда $4a+b+c=0$, или $a=-\frac{b+c}{4}$. Тогда
$$(-1)\cdot S=-(ab+bc+ca)=-bc-a(b+c)=-bc+\frac{b+c}{4}(b+c)=\frac{(b+c)^2-4bc}{4}=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$
Так как $b+c=-4a$, то b и c одинаковой чётности, поэтому число $\frac{b-c}{2}$ – целое.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что $4a+b+c=0$ – 2 балла. Получено равенство $(-1)\cdot S=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, но не доказано, что выражение в скобках – целое число – 5 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.3. Каждую ночь трое из восьми гномов отправляются стеречь клад от злых троллей. После каждого такого дежурства они ссорятся настолько, что никакие двое после этого вместе стеречь клад второй раз не идут. Какое наибольшее количество ночей гномы смогут оберегать клад от троллей?

Ответ. 8.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим любого из гномов. В каждом дежурстве он находится вместе с двумя гномами, поэтому после трёх его выходов останется один гном, вместе с которым он не ходил в дежурство, и уже не сможет пойти, так как для них не будет третьего. Эта ситуация «симметрична», то есть если гном X после трёх своих выходов не ходил на дежурство с гномом Y, то и гном Y после трёх своих выходов не ходил на дежурство с гномом X. Следовательно, есть как минимум четыре пары гномов, которые на одном дежурстве не были и не будут. Всевозможных пар: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, поэтому на дежурстве побывают не более чем $28 - 4 = 24$ пары. Так как за одну ночь задействованы по три пары гномов, то ночей может быть не больше чем $24 : 3 = 8$.

Пример. Обозначим гномов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Тогда восемь троек, удовлетворяющих условию задачи: 512, 623, 734, 841, 564, 671, 782, 853.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, и получен верный ответ – 5-6 баллов. Приведены верный ответ и верная оценка, но пример отсутствует или неверен – 4 балла. Приведены верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует или неверна – 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что любое чётное число $n \geq 2023$ можно представить в виде $x(x+1)(x+2) - y(y+1)$, где x и y – натуральные числа. Могут ли слова барона быть правдой?

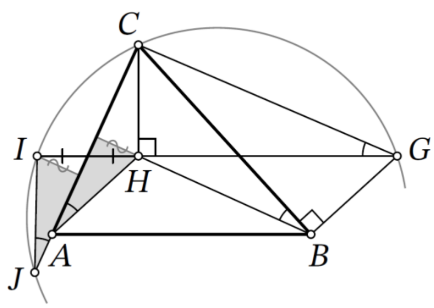
Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что произведение трёх последовательных натуральных чисел $x(x+1)(x+2)$ делится на 3. Разберём несколько случаев. Если y имеет отстаток 0 или 2 при делении на 3, то $y(y+1)$ делится на 3. Значит, число $x(x+1)(x+2) - y(y+1)$ делится на 3. Если y имеет остаток 1 при делении на 3, то $y(y+1)$ имеет остаток 2 при делении на 3. Значит, число $x(x+1)(x+2) - y(y+1)$ имеет остаток 1 при делении на 3. Это означает, что число $x(x+1)(x+2) - y(y+1)$ не может иметь остаток 2 при делении на 3, т.е., например, число 2024 в требуемом виде не представить.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что разность произведений не может иметь остаток 2 при делении на 3, но не приведен пример числа, которое не представимо в нужном виде – баллы не снимаются.* *Верный ответ без объяснения – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

10.5. Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Точка G выбрана так, что $ABGH$ является параллелограммом, а точка I на прямой GH так, что IH делится AC пополам. Около треугольника GCI описана окружность, которую прямая AC пересекает в точках C и J. Докажите, что $AH = IJ$.

Решение. Заметим, что нам достаточно доказать $\angle IJC = \angle CAH$. Действительно, если установить это, то можно будет опустить перпендикуляры II_1 и HH_1 на AC и они окажутся равны, так как IH делится прямой AC пополам – и получить равенство прямоугольных треугольников JI_1I и AH_1H по углу и катету. Так как $JICG$ – вписанный четырёхугольник, то $\angle IJC = \angle IGC$. Далее, $CH \perp AB \parallel HG$ и $CB \perp AH \parallel BG$, откуда $\angle IGC = \angle HGC = \angle HBC$. Наконец, углы HBC и CAH равны, так как это углы между сторонами и высотами, и оба они дополняют угол C треугольника до 90°.



Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Задача сведена к доказательству того, что углы IJC и CAH равны, но равенство этих углов не доказано – 1 балл.* *Доказана вписанность четырёхугольника $CHBG$ – 3 балла. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*