10 класс

1. Натуральные числа m и n таковы: что $99m = 91n$, докажите, что $m+n$ составное.

Решение:

99 и 91 взаимно простые числа.

$99m$ делится на 91 $\Rightarrow m = 91t$, где t– натуральное число. Тогда имеем:

$99 \cdot 91t = 91n,\ \ n = 99t,$ значит

$m + n = 91t + 99t = 190t \ \Longrightarrow\ m + n \geq 190$ и $m+n$ делится на 2 (5;10), т.е. $m+n$ – составное число.

2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 4x + 4y = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y = 0 \end{cases}$$

Решение:

Умножим первое уравнение на 5, а второе на –4:

$$\begin{cases} 10x^2 - 5xy - 5y^2 - 20x + 20y = 0 \\ -4x^2 - 4xy + 8y^2 + 20x - 20y = 0 \end{cases}$$

Сложим уравнения системы:

$$6x^2 - 9xy + 3y^2 = 0$$

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

$$2x^2 - 2xy - xy + y^2 = 0$$

$$2x(x-y) - y(x-y) = 0$$

$$(x-y)(2x-y) = 0$$

$x = y$ или $y = 2x$

Подставим $y = 2x$ в первое уравнение системы:

$$2x^2 - 2x^2 - 4x^2 - 4x = 8x = 0$$

$$-4x^2 + 4x = 0$$

$$4x(-x+1) = 0$$

$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1,\ \ y_1 = 0,\ \ y_2 = 2.$

Итак, решение системы является пара равных друг другу чисел или пара (1; 2)

Ответ: (1; 2), (a; a), где a – любое действительное число.

3. Доказать неравенство

$$\frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|} \le \frac{|a|}{2+|a|} + \frac{|b|}{2+|b|} + \frac{|c|}{2+|c|}$$

Решение:

Известно, что $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$, тогда

$|a|+|b|+|c| = |a+b+c| + x,\ x \ge 0.$

Дробь $\frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|}$ – правильная, т.к. знаменатель больше числителя. Известно, что правильная дробь $\frac{p}{q}$, где $p>0,\ q>0$ увеличивается, если к числителю и знаменателю прибавить одно и то же положительное число x, т.е. имеет место неравенство $\frac{p+x}{q+x} \ge \frac{p}{q}$, действительно, $\frac{p+x}{q+x} - \frac{p}{q} = \frac{x(q-p)}{q(q+x)}$, тогда

$$\frac{|a+b+c|}{2+|a+b+c|} \le \frac{|a|+|b|+|c|}{2+|a|+|b|+|c|} = \frac{|a|}{2+|a|+|b|+|c|} + \frac{|b|}{2+|a|+|b|+|c|} +$$

$$+ \frac{|c|}{2+|a|+|b|+|c|} \le \frac{|a|}{2+|a|} + \frac{|b|}{2+|b|} + \frac{|c|}{2+|c|}$$

4. Дана геометрическая прогрессия с положительными членами. Известно, что 10-ый член этой прогрессии меньше 8, а 21-ый член больше 64. Докажите, что 87-ой член больше, чем 2^{24}.

Решение:

Пусть b – первый член прогрессии.

По условию $b > 0,\quad q > 0,\ \ bq^9 < 8,\ \ bq^{20} > 64.$

Следовательно, $\frac{bq^{20}}{bq^9} = q^{11} > 8.$

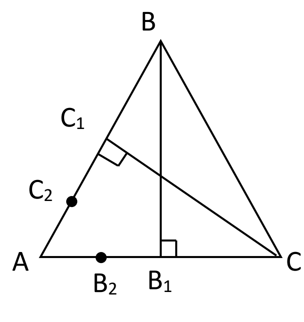
Поэтому, $q^{66} > 8^6 = 2^{18}$.

перемножим неравенства $bq^{20} > 2^6$ и $q^{66} > 2^{18}$

$bq^{86} > 2^6 \cdot 2^{18} = 2^{24}$,

bq^{86} – 87-ой член прогрессии.

5. Дан остроугольный треугольник ABC. BB_1 и CC_1 – высоты. На стороне CA отмечена точка B_2 так, что $CC_1 = CB_2$. На стороне BA отмечена C_2 так, что $BB_1 = BC_2$. Доказать, что C_1, C_2, B_1, B_2 лежат на одной окружности.



Доказательство:

Пусть $C_1B_2 \cap B_1C_2 = Q$

Пусть $\angle C_1C_2B_1 = \alpha$, тогда $\angle C_2B_1B = \alpha$

(ΔBB_1C_2 – равнобедренный)

$\angle C_2B_1B_2 = 90^o - \alpha$.

Пусть $\angle CC_1B_2 = \beta$, тогда $\angle C_1B_2C = \beta$

(ΔC_1CB_2 – равнобедренный).

$\angle C_2C_1Q = 90^o - \beta$

$\angle C_1QC_2 = 180^o - \alpha - (90^o - \beta) =$

$= 180^o - \alpha - 90^o + \beta = 90^o - \alpha + \beta$

$\angle B_1QB_2 = 180^o - \beta - (90^o - \alpha) =$

$= 90^o - \beta + \alpha$

$\angle C_1QC_2 = \angle B_1QB_2$ – вертикальные

$90^o - \alpha + \beta = 90^o - \beta + \alpha$

$2\beta = 2\alpha$

$\alpha = \beta \Rightarrow \angle C_1C_2B_1 = \angle C_1B_2B_1$,

следовательно, около $C_2C_1B_1B_2$

можно описать окружность.