Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

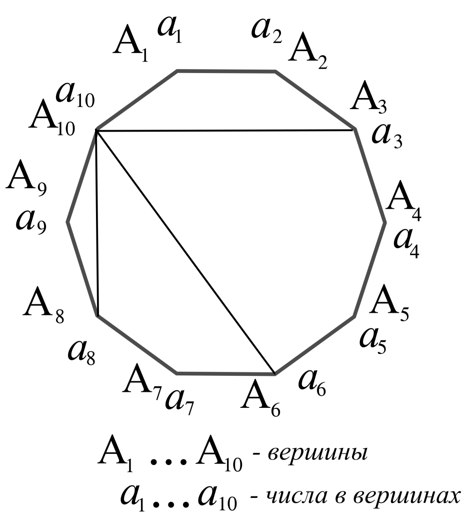
Муниципальный этап

2023-2024 уч.год

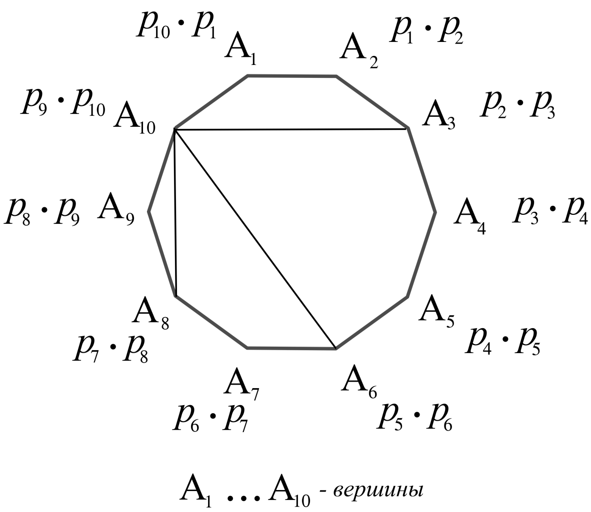
10 класс

Решения и ответы

1. Можно ли так расставить натуральные числа в вершинах правильного десятиугольника, чтобы были выполнены два правила:
– любые два числа, стоящие в соседних вершинах, т.е. в вершинах, соединенных стороной, имели бы общий делитель;
– любые два числа, стоящие в вершинах, соединенных какой-либо диагональю, не имели бы общих делителей, больших единицы?

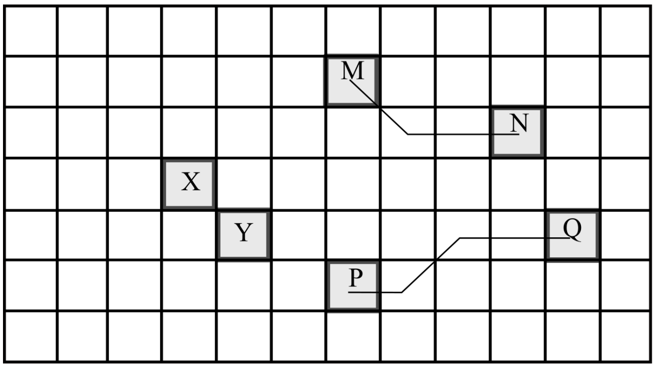


Решение. Да, это можно сделать. Пронумеруем вершины $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_9,\ A_{10}$. Возьмем десять несовпадающих простых чисел, $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,p_9,\ p_{10}$. В первой вершине расположим число $p_{10}\cdot p_1$, во второй вершине расположим число $p_1\cdot p_2$, в третьей вершине расположим число $p_2\cdot p_3$, в вершине A_k расположим число $p_{k-1}\cdot p_k$, и так далее, в вершине A_{10} расположим число $p_9\cdot p_{10}$. Очевидно, каждая пара соседних по стороне вершин имеет общий делитель своих двух чисел. Каждая пара чисел, стоящих на диагонали, не имееет общих делителей.

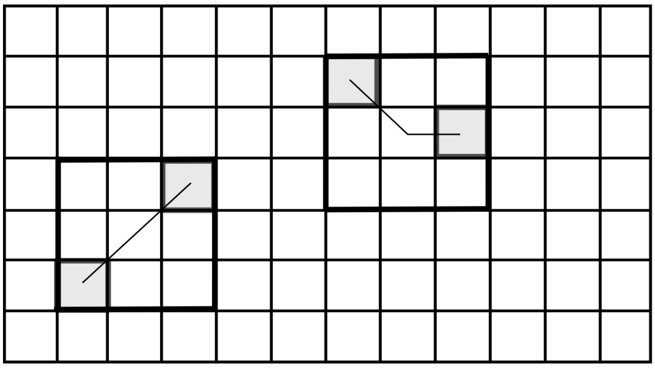


2. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в восемь цветов. Докажите, что найдутся две клетки какого-то одного цвета, расстояние между которыми по сетке не больше одной клетки.

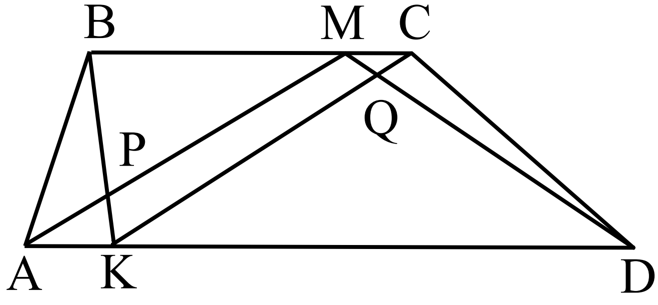
Расстоянием на сетке между клетками A и B назовем количество промежуточных клеток, которые нужно пройти, двигаясь по самому короткому пути из A в B. На рисунке показаны клетки X и Y, расстояние между которыми равно 0; клетки M и N, расстояние между которыми равно 2; клетки P и Q, расстояние между которыми равно 3. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону (соседние по вертикали или горизонтали) или общую вершину (соседние по диагонали).



Решение. В произвольном месте плоскости рассмотрим квадрат 3×3 клетки. В нем девять клеток, покрашенных не болеее, чем в восемь цветов. Значит, не меньше двух клеток квадрата имеют одинаковый цвет. Так как эти клетки находятся в квадрате 3×3, то расстояние между найденными одноцветныими клетками не больше, чем 1.



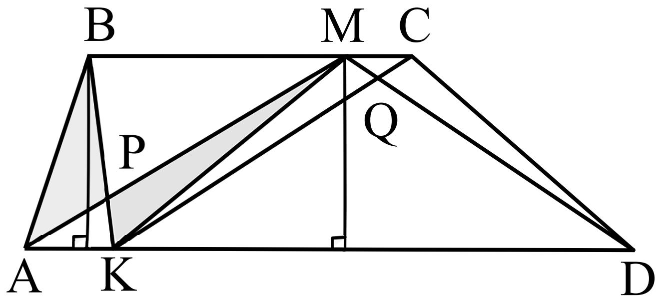
3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. На основаниях отмечены произвольные точки K и M, см. рисунок. Отрезок AM пересекает отрезок BK в точке P, отрезок DM пересекает отрезок CK в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна площади четырехугольника $KPMQ$.



Решение. Проведем диагональ KM четырехугольника $KPMQ$. В трапеции $ABMK$ треугольники ABK и AMK имеют равную площадь, так как имеют общее основание AK и равные высоты. Эти треугольники содержат в себе треугольник APK, поэтому площади треугольников ABP и KMP равны.

Аналогично доказываем, что площади треугольников CDQ и KMQ также равны.

Сумма площадей треугольников ABP и CDQ равна сумме площадей площади треугольников KMP и KMQ, т.е. площади четырехугольника $KPMQ$.



4. Решите систему уравнений, считая x и y натуральными (целыми положительными) числами

$$\begin{cases} \text{НОД}(x,y) + 143x = 2009 \\ \text{НОД}(x,y) \cdot \text{НОК}(x,y) + 3y = 2023 \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\text{НОД}(x,y) = d$, $x = d \cdot x_1$, $y = d \cdot y_1$, где x_1 и y_1 взаимно простые числа. Тогда $\text{НОК}(x,y) = d \cdot x_1 \cdot y_1$. Тогда система перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} d + 143d \cdot x_1 = 2009 \\ d^2 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3d \cdot y_1 = 2023 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} d \cdot (1 + 143x_1) = 7^2 \cdot 41 \\ d \cdot y_1(d \cdot x_1 + 3) = 7 \cdot 17^2 \end{cases}$$

Заметим, что левые части уравнений делятся на d, тогда и правые части должны делиться на d. Отсюда получаем, что d – общий делитель 2009 и 2023. Следовательно $d = 1$ или $d = 7$.

Первый случай.
$d = 1$.

$$\begin{cases} 1 + 143x_1 = 2009 \\ y_1(x_1 + 3) = 2023 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем, что $x_1 = \frac{2008}{143}$, что не является натуральным числом, а значит не удовлетворяет условию задачи.

Второй случай.
$d = 7$

$$\begin{cases} 1 + 143x_1 = 287 \\ y_1(7x_1 + 3) = 289 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $x_1 = 2$, подставляя это значение во второе уравнение, получаем, что $y_1 = 17$. Тогда $x = 7 \cdot 2 = 14$, $y = 7 \cdot 17 = 119$.

Добавление.
Второе уравнение системы, с применением известного факта НОД$(x, y) \cdot$ НОК$(x, y) = xy$, может быть переписано в виде $xy + 3y = 2023$. Это уравнение может быть решено как уравнение в целых числах. Такое решение требует разложения 2023 на простые множители и аккуратного последовательного рассмотрения шести случаев значений y.

Ответ. $x = 14$, $y = 119$

5. Пусть $a > 0, b > 0, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{3a+2} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+2} \leq 3\sqrt{3}$$

Решение. Пусть $x = \sqrt{3a+2},\ y = \sqrt{3b+2},\ z = \sqrt{3c+2}$. Тогда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a + 2 + 3b + 2 + 3c + 2 = 3(a + b + c) + 6 = 9$$

Воспользуемся известным неравенством

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

(его доказательство приведено ниже). Так как

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3 \cdot 9 = 27$$

то, с учетом $x > 0, y > 0, z > 0$

$$x + y + z \leq 3\sqrt{3}$$

Исходное неравенство доказано.

Доказательство вспомогательного неравенства:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

Последнее неравенство выполняется, так как каждый квадрат не меньше 0.