Решения муниципального этапа ВсОШ по математике

10 класс

1. Маша и Катя исследуют 29 одинаковых по форме алмазов. 14 из них – природные, остальные искусственные. Каждый природный алмаз тяжелее искусственного на 2 грамма. У девочек есть чашечные весы без гирь, стрелка на которых показывает разность весов на чашках. Могут ли девочки, взяв один алмаз, за одно взвешивание сказать искусственный он или природный?

Решение. Надо положить на каждую чашку по 14 алмазов. Если у девочек природный алмаз, то на чашках останется всего 13 природных алмазов и разница в весе алмазов на чашках будет числом, дающим при делении на 4 в остатке 2, а если у девочек искусственный алмаз, то числом кратным 4.

Ответ. Да.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3y^2+4}}{y-1} \geq 4$.

Решение. Поскольку $\sqrt{3y^2+4} > 0$ при любом $y \in R$, то из данного неравенства имеем $y-1>0$, т.е. $y>1$.

Запишем данное неравенство в виде $\sqrt{3y^2+4} \geq 4(y-1)$, и так как обе части неравенства положительны, то, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство:

$3y^2+4 \geq 16y^2-32y+16$, или $13y^2-32y+12 \leq 0$

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим $\frac{6}{13} \leq y \leq 2$. Учитывая, что $y>1$, имеем $1<y\leq 2$.

Ответ. (1; 2].

3. Верно ли равенство

$$\frac{2\cdot 2023}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2023}} = 2024?$$

Решение.

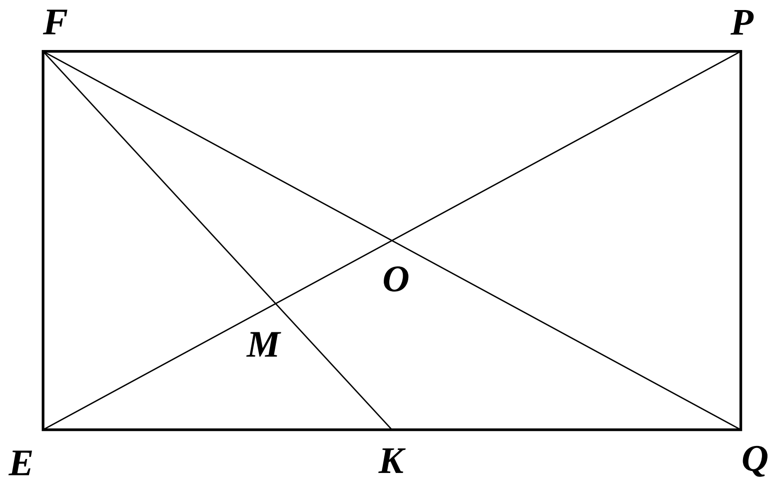
$$\frac{2\cdot 2023}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2023}} = \frac{2\cdot 2023}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1012\cdot 2023}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2023}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1012\cdot 2023}} = \frac{2023}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2024\cdot 2023}} =$$

$$= \frac{2023}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}} = \frac{2023}{1-\frac{1}{2024}} = 2024.$$

Ответ. Да.

4. Дан прямоугольник $EFPQ$, причем $EQ : EF = \sqrt{2}$. Точка K лежит на стороне EQ и $EK = KQ$. Найдите угол между FK и EP.



Решение. Пусть $EF = x$, тогда $EQ = x\sqrt{2}$. Выразим через x все стороны ΔEMK и применим теорему косинусов для стороны EK. Это позволит вычислить косинус искомого угла EMK. Пусть $\angle EMK = \alpha$. Заметим, что EO и FK – медианы ΔEFQ.

Значит, $MK = \frac{1}{3}FK$, $EM = \frac{2}{3}EO$, тогда

$$MK = \frac{1}{3}FK = \frac{1}{3}\sqrt{EF^2 + EK^2} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{x}{\sqrt{6}}.$$

$$EM = \frac{2}{3}EO = \frac{1}{3}EP = \frac{1}{3}\sqrt{EQ^2 + PQ^2} = \frac{1}{3}\sqrt{2x^2 + x^2} = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

В ΔEMK: $EK = \frac{x}{\sqrt{2}}, EM = \frac{x}{\sqrt{3}}, MK = \frac{x}{\sqrt{6}}$ тогда, по теореме косинусов имеем:

$$EK^2 = EM^2 + MK^2 - 2EM \cdot MK \cos\alpha,$$

или $\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}x^2\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = 0$, значит, $\angle EMK = \alpha = 90°$.

Замечание: можно и по теореме обратной теореме Пифагора, так как

$EK^2 = EM^2 + MK^2$ $(\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6})$, то $\angle EMK = \alpha = 90°$.

Ответ. $90°$.

5. Гостинице необходимо закупить новое постельное белье. В распоряжении менеджера 2 млн. руб. Покупать отдельные комплекты слишком дорого. На сайте

проводятся акции – упаковка из 15 комплектов стоит 24 тыс. руб., из 27 комплектов – 40 тыс. руб., а за упаковку из 46 комплектов просят 60 тыс. руб. Сколько и каких упаковок надо купить, чтобы общее число комплектов оказалось наибольшим?

Решение. Пусть покупают x, y, z упаковок соответственно. Тогда $24x + 40y + 60z \leq 2000$ и требуется определить наибольшее значение функции $f(x, y, z) = 15x + 27y + 45z$. Решить систему уравнений не получается, но можно вычислить стоимость одного комплекта белья в каждом из случаев: 1600 руб., $1481\frac{1}{9}$ руб., $1333\frac{1}{3}$ руб.

Так как $1333\frac{1}{3} < 1481\frac{1}{9} < 1600$, то сначала покупаем упаковки по 45 комплектов, потом по 27, потом по 15.

Упаковок по 45 комплектов можно купить не более 33 упаковок.

Рассмотрим два случая.

1 случай. Куплено 33 упаковок по 45 комплектов. Тогда больше упаковок купить не получится. Общее количество комплектов будет равно 1485.

2 случай. Упаковок по 45 комплектов можно купить 32 и останется 80 тыс. руб., на которые можно купить упаковки по 27 комплектов. Тогда в итоге купим 1494 комплекта постельного белья. Все деньги потрачены, поэтому увеличить значение оптимизируемой функции не удастся.

Ответ. 1494.