10 класс

$\boxed{1}$ Целая часть числа a – *это наибольшее целое число, не превосходящее* a*. Целая часть* a *обозначается* $[a]$*. Например,* $[2,34] = 2$*,* $[-\pi] = -4$ *и* $[5] = 5$. Дробная часть числа *– это разность между числом и его целой частью, дробная часть обозначается* $\{a\}$*. Например,* $\{-1,2\} = -1,2 - (-2) = 0,8$*;* $\{\pi\} = \pi - 3$ *или* $\{-2\} = 0$*. Решите уравнение*

$$\{(x+1)^3\} = x^3.$$

Решение. Пусть $[(x+1)^3] = s$, тогда $(x+1)^3 - s = x^3$. Отсюда $s = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$. При этом поскольку для любого t выполняется $0 \leqslant \{t\} < 1$, то в силу данного уравнения $0 \leqslant x^3 < 1$ или $0 \leqslant x < 1$. При таких x выражение $f(x) = 3x^2+3x+1$ монотонно возрастает и тем самым принимает значения от 1 до $3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 = 7$. Находя для каждого из $s = 1,2,3,4,5,6,7$ корни уравнения $3x^2+3x+1 = s$ из интервала $[0,\ 1)$, получаем ответ.

Ответ: 0; $\dfrac{\sqrt{21}-3}{6}$; $\dfrac{\sqrt{33}-3}{6}$; $\dfrac{\sqrt{45}-3}{6}$; $\dfrac{\sqrt{57}-3}{6}$; $\dfrac{\sqrt{69}-3}{6}$.

$\boxed{2}$ *Петя задумал 5 чисел, сложил числа во всех 10 возможных парах и написал на листке только значения этих 10 сумм в произвольном порядке. Может ли Вася имея листок с этими 10 числами узнать числа, задуманные Петей?*

Решение. Занумеруем значения сумм на листке в порядке неубывания значений: $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{10}$. Тогда если загаданные Петей числа $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4 \leqslant t_5$, то $s_1 = t_1 + t_2$ и $s_{10} = t_4 + t_5$. Поскольку каждое из 5 чисел участвует в 4 парах, то $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_{10} = 4(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5) = 4T$, откуда $T = \dfrac{S}{4}$. Тогда $t_3 = T - (t_1+t_2) - (t_4+t_5) = \dfrac{S}{4} - s_1 - s_{10}$. Отсюда вместе с Васей находим $t_1 = s_2 - t_3$ и $t_5 = s_9 - t_3$. А затем $t_2 = s_1 - t_1$ и $t_4 = s_{10} - t_5$.

$\boxed{3}$ *В дружной компании все 11 человек попарно дружили. В час испытаний случились ссоры в 17 парах. Докажите, что тем не менее можно найти три человека, все еще попарно дружных.*

Решение. Есть ровно 9 способов добавить к данной паре из 11 человек третьего. Поэтому для каждой ссоры есть 9 троек (с ее участием), где теперь три человека не попарно дружны. А для всех 17 попарных ссор таких сломанных троек не более чем $17\cdot 9 = 153$. Но всего из 11 человек можно составить $\dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{6} = 165 < 153$ троек. Поэтому некоторые тройки останутся несломанными.

$\boxed{4}$ *Треугольник* KLM *остроугольный,* KK_1 *и* LL_1 *– его высоты, а* ω *– описанная окружность. Эта окружность пересекает прямую* K_1L_1 *в точках* K' *и* L'*. Касательные к* ω*, проведенные в точках* K' *и* L'*, пересекаются в точке* M'*. Докажите, что* MM' *проходит через центр окружности* ω*.*

Решение. Имеем $\angle MK_1L_1 = \angle MK_1L' = \dfrac{\smile ML' + \smile LK'}{2}$. При этом $\dfrac{\smile ML}{2} = \angle K = \angle MK_1L_1$. Значит, $\smile MK' = \smile ML'$. Поэтому M и M' лежат на серединном перпендикуляре к хорде $K'L'$ окружности ω. Но центр окружности ω также лежит на этом серединном перпендикуляре.

$\boxed{5}$ *В сувенирном наборе аптекарских гирек число гирек равно* N*, а массы двух произвольных гирек отличаются не более чем в* k *раз. Саня получил такой набор и смог* *разложить все гирьки на десять равных по массе кучек, а Таня получила такой же набор и смогла разложить все гирьки на одиннадцать равных по массе кучек. Каково наименьшее возможное значение N, если $k = 5/4$?*

Решение. Покажем, что в наборе может быть 50 гирь. Пусть в наборе 20 гирь массой 10г и 30 гирь массой 8г. Тогда Саня может сделать 10 кучек, в каждой из которых 2 гири 10г и 3 гири 8г. А Таня может сделать 11 кучек: 5 кучек где 4 гири по 10г в каждой, и 6 кучек где 5 гирь по 8г в каждой.

Пусть существует набор, где $N < 50$. Тогда и у Сани, и у Тани есть кучки, в которых не более четырех гирь. Покажем, что если выполняются условия задачи и имеются две кучки гирь равной суммарной массы с количеством гирь n_1 и $n_2 > n_1$, то $n_1 \geqslant 4$.

Действительно, если самая легкая гиря группе из n_2 гирь весит a, то суммарная масса гирь этой группы не меньше $n_2 a \geqslant (n_1+1)a$. С другой стороны, суммарная масса группы из n_1 гирь не больше $\dfrac{5an_1}{4}$. Поэтому $(n_2+1)a \leqslant \dfrac{5an_1}{4}$ или $n_1+1 \leqslant \dfrac{5}{4}n_1$ и $n_1 \geqslant 4$. При этом если $n_1 = 4$, то необходимо $n_2 a = (n_1+1)a = 5a$, то есть $n_2 = 5$. Кроме того, тогда в группе из 5 гирь все гири одинаковой массы $a = 4b$, а в группе из 4 гирь все гири одинаковой массы $5b$.

Посмотрим, какие количества гирь встречаются в кучках Сани.

1) Если у Сани есть две кучки с разным числом гирь, то кроме групп из 4 гирь по доказанному у Сани есть только группы в 5 гирь. При этом масса одной кучки равна $4 \cdot 5b = 20b$, а масса всех кучек вместе $10 \cdot 20b = 200b$. Поскольку в рассматриваемом случае бывают гири только в $4b$ или в $5b$, одна кучка гирь может весить только целое число b. Однако $200b$ не делится на 11 равных частей по целому количеству b.

2) Если же у Сани все кучки имеют одно и то же количество гирь, то общее количество гирь кратно 10. Если при этом у Тани есть кучки с двумя разными количествами гирь, то по доказанному меньшее из двух этих количеств не меньше 4, а тогда общее число гирь $N \leqslant 4 \cdot 11 = 44$ и значит $N \geqslant 50$ вопреки предположению. А если и у Тани все кучки по равному количеству гирь, то N кратно 11. Тогда $N \geqslant 10 \cdot 11 = 110$, также вопреки предположению.

Таким образом, $N < 50$ при наших условиях невозможно.