ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

Задача 10.5 предложены А.Д. Терёшиным, задача 10.3 предложена А.А. Чироновым.

10 класс

10.1. Прямые $y = ax$ и $y = bx$, $a > 0$, $b > 0$ пересекают прямую $y = a$ соответственно в точках A и B. Найдите отношение $a: b$, если известно, что длина отрезка AB равна 4.

Ответ. $a: b = 5$.

Решение. Прямая $y = ax$ пересекают прямую $y = a$ в точке A с координатами $(1;\ a)$. Поэтому точка B имеет координаты $(5;\ a)$. Но точка B лежит на прямой $y = bx$. Поэтому $a = b \cdot 5$, откуда $a: b = 5$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.2. В правильном 30-угольнике две соседние вершины покрасили в красный цвет, а остальные – в синий. Сколькими способами можно выбрать прямоугольный треугольник с одной красной и двумя синими вершинами?

Ответ. 80.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Угол является прямым, если он опирается на диаметр. Возможны два случая.
1. Угол при красной вершине – прямой. Тогда гипотенузу (диаметр) для каждой из красных вершин можно выбрать (30–4):2=13 способами. Всего в этом случае получаем 2·13=26 способов.
2. Угол при красной вершине – не прямой. Значит, диаметр с концами в красной и синей вершинах является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать 30-3=27 способами. Всего в этом случае получаем 2·27=54 способа.

Общее количество способов есть 26+54=80.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

10.3. Артём записал на доске несколько натуральных чисел, а Саша для каждой пары чисел вычислил сумму их квадратов. Какое наибольшее количество различных чисел мог получить Саша, если оказалось, что все найденные им суммы – простые числа?

Ответ. 2.

Решение. Если на доске записано два четных числа, то сумма их квадратов – четное число, большее 2, то есть составное число. Поэтому четных чисел на доске не более одного. Если на доске записано два нечетных числа, хотя бы одно из которых больше 1, то сумма их квадратов – четное число, большее 2, то есть составное число. Поэтому если на доске есть нечетные числа, то на доске либо одно нечетное число, большее 1, либо нечетные числа равны 1.
Если на доске одно нечетное число, большее 1, и одно четное, то Саша мог получить только одно число. Если же на доске записано одно четное число и несколько единиц, Саша мог получить 2 различных числа.
Покажем, что Саша мог получить две различных суммы. Это могло произойти, например, если Артём записал числа 1, 1 и 2. Тогда Саша получит суммы 2 и 5, которые являются простыми числами.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что различных сумм не больше двух – 5 баллов.

Только пример с двумя различными суммами – 2 балла.

10.4. На столе лежат 118 карточек с числами от 1 до 118. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

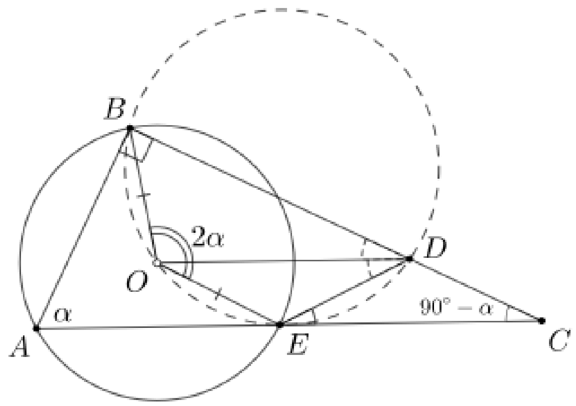
Ответ. Первый.

Решение. Опишем стратегию первого игрока. Пусть он выделит следующие карточки: с числами от 11 до 20 (включительно), от 31 до 40, от 51 до 60, от 71 до 80, от 91 до 100 и от 111 до 118. Выделенных карточек 58. Невыделенные карточки разобьются на 6 групп по 10 карточек (с числами от 1 до 10, от 21 до 30, от 41 до 50, от 61 до 70, от 81 до 90 и от 101 до 110), причем если две невыделенные карточки находятся в одной группе, то числа на них отличаются не больше чем на 9, а если в разных, то не меньше чем на 11. Всего в игре каждый игрок сделает по 58 ходов. Поэтому за свои 58 ходов первый игрок должен забрать выделенные карточки (это произойдет быстрее, если второй игрок также заберет какие-то выделенные карточки). Поэтому в конце игры останутся две невыделенные карточки, и числа на них будут отличаться не на 10.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

10.5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ABC = 90°$), на сторонах BC и AC отмечены точки D и E соответственно так, что $CD = DE$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABE лежит на биссектрисе угла BDE.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABE и $\angle BAC = \alpha$ (см. рис.). Тогда $\angle ACB = \angle CED = 90° - \alpha$. Значит, $\angle BDE = 180° - 2\alpha = 180° - \angle BOE$. Поэтому четырёхугольник $BOED$ вписанный. Значит, углы BDO и EDO равны, как вписанные, опирающиеся на равные хорды $OB = OE$.

Комментарий.

Доказана вписанность четырёхугольника $BOED$ – 3 балла.