10 класс

1. Маша умеет умножать натуральное число на 15 и переставлять местами его цифры. Даша умеет прибавлять к натуральному числу 6 и тоже переставлять местами его цифры. Никита умеет складывать числа. Маша и Даша каждая берут число 2024 и некоторое время экспериментируют, а потом Никита складывает их результаты. У него получилось число 202320242025. Докажите, что он ошибается.

Решение. Машино число после всех экспериментов при делении на 3 либо будет иметь остаток 2 (если она ни разу не умножала на 15), либо 0 (т.к. 15 делится на 3). Дашино число в любом случае будет при делении на 3 иметь остаток 2. Поэтому сумма этих чисел при делении на 3 будет иметь остаток 1 либо остаток 2. Число Никиты делится на 3. Противоречие.

2. В лицее провели контрольную работу для всех 10-классников. Ровно треть участников и ещё 20 учеников получили «тройки», ровно четверть участников и ещё 30 учеников получили «четвёрки», а некоторые продвинутые ребята получили «пятёрки». «Двойки» никто не получал. Кого оказалось больше: получивших «тройки» или получивших «четвёрки»?

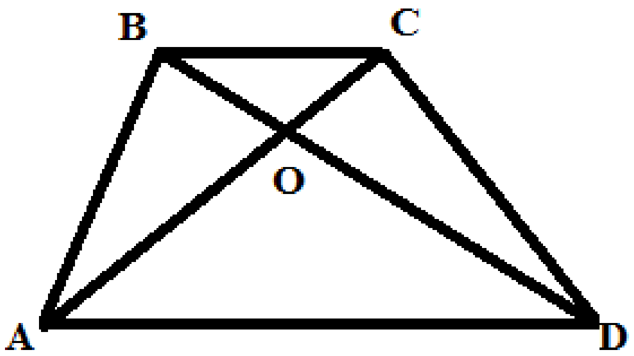
Ответ: больше «троечников».

Решение. Заметим, что общее количество 10-классников делится на 3 и на 4, а значит, делится на 12. Обозначим количество 10-классников через 12к. Тогда «3» получили 4к+20 человек, а «4» получили 3к+30 человек. Отметку «5» получили 12к – (4к+20) – (3к+30) = 5к – 50 человек. Так как некоторые 10-классники действительно получили «5», то 5к – 50 > 0, т.е. к > 10. Тогда разность количества получивших «3» и количества получивших «4» равна к – 10, что больше нуля.

3. В выпуклом четырёхугольнике провели диагонали, которые делят его на 4 треугольника, имеющих целочисленные площади. Оказалось, что три меньших площади — последовательные натуральные числа. Найдите площадь большего треугольника.

Ответ: 6.

Решение. В любом выпуклом четырёхугольнике ABCD произведение площадей треугольников ABO и DCO равно произведению площадей треугольников CBO и DAO (см. рисунок).



Обозначим самую маленькую из площадей a. Против треугольника с площадью a может находиться только треугольник с самой большой площадью, иначе нарушается равенство произведений площадей. Обозначим эту площадь за $(a+x)$. Два других треугольника, тоже противоположных, имеют площади $(a+1)$ и $(a+2)$.

Получаем уравнение: $a(a+x)=(a+1)(a+2)$. Тогда $a^2+ax=a^2+3a+2$ и, значит, $a(x-3)=2$.

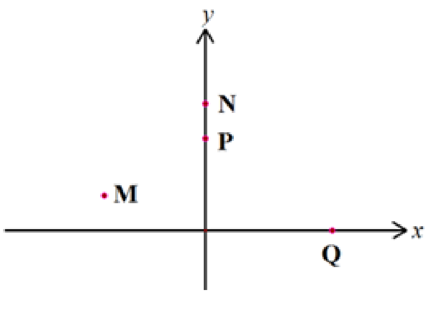
Так как a и x — натуральные числа по условию, мы имеем диофантово уравнение.

Либо $a=2$ и $x-3=1,$ то есть $x=4$. Тогда получаем, что $a+x=\ 2+4=6$.

Либо $a=1$ и $x-3=2,$ то есть $x=5$. Тогда получаем, что $a+x=\ 1+5=6$.

Итак, в любом из возможных случаев площадь большего треугольника равна 6.

4. Могут ли графики многочленов $f(x)=x^3+bx^2+cx+a$ и $g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ располагаться на плоскости таким образом, что график $f(x)$ проходит через точки M, P и Q, а график $g(x)$ — через точки M и N (смотри рисунок)?



Ответ: не могут.

Решение. Предположим, что такие многочлены нашлись. Так как точка N выше точки P, то $g(0)>f(0)>0$. Значит, $c>a>0$, так как $f(0)=a$ и $g(0)=$ c. К тому же многочлен $f(x)$ имеет положительный корень, значит, не все его коэффициенты положительны. Но

$a > 0$ и $c > 0$, поэтому $b < 0$. Далее, оба графика проходят через точку $\mathrm{M}(m; n)$, где $m < 0$. Тогда $g(m) = f(m)$. Получаем

$$bm^2 + cm + a = am^2 + bm + c.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть уравнения, можно получить

$$m^2(b - a) + m(c - b) + (a - c) = 0.$$

Но это невозможно, так как левая часть отрицательна.

5. Дедка вырастил 15 репок весом 50, 51, 52, …, 64 кг. Ему известен вес каждой из репок. С помощью чашечных весов дедка собирается доказать бабке, внучке и Жучке, что первая репка весит 50 кг, вторая 51 кг,…, последняя — 64 кг (вначале зрители не знают про вес репок абсолютно ничего). Докажите, что дедка сумеет обойтись ровно одной гирей, если и гирю, и репки можно размещать на обеих чашках весов, а количество взвешиваний не ограничено? (В наличии имеются гири весом 1, 2, 3, 4,…, 1000 кг. Вес гирь известен как дедке, так и зрителям.)

Ответ: достаточно одной гири массой 1 кг.

Решение. Покажем, что можно обойтись одной гирей весом 1 кг. Положим на одну чашу весов репку весом 51 кг, а на другую — репку весом 50 кг и гирю весом 1 кг. Весы покажут равновесие, зрители поймут, что репки отличаются весом ровно на 1 кг.

Поступив аналогично с репками весом 51 кг и 52 кг, 52 кг и 53 кг,…, 63 кг и 64 кг, убедим зрителей, что репки весят n, (n + 1), (n + 2), …, (n + 14) кг.

Последним взвешиванием покажем, чему равно n. На одну чашку весов положим репки весом от 50 до 57 кг, на другую — остальные репки и гирю. Весы покажут равновесие. Получим, что n + (n + 1) +… + (n + 7) = (n +8) + (n + 9) +…+ (n + 14) + 1. Тогда 8n + 28 = 7n + 78. Значит, n = 50.