10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^3+8y^3+6xy=1. \end{cases}$

Ответ: Множество решений представляет собой прямую $y=\dfrac{1-x}{2}$. **Решение**. Второе уравнение есть следствие первого, так как, используя первое уравнение, во втором получим:

$$x^3+8y^3+6xy=(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)+6xy=x^2-2xy+4y^2+6xy=(x+2y)^2=1.$$

Таким образом, второе уравнение не несет новой информации.

10.2. Решите уравнение $x^4+4+2x(x^2-2x+2)=0$.

Ответ: $-2\pm\sqrt{2}$. **Решение**. Разложим левую часть уравнения на множители, дополнив до полного квадрата: $x^4+4+2x(x^2-2x+2)=\left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2+2x(x^2-2x+2)=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2+$ $+2x(x^2-2x+2)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)+2x(x^2-2x+2)=(x^2-2x+2)(x^2+4x+2)$.Тогда получим $(x^2+4x+2)(x^2-2x+2)=0$. Корнями первого множителя являются $-2\pm\sqrt{2}$, а второй множитель имеет отрицательный дискриминант. *Комментарий: разложить левую часть уравнения на множители можно было также, если разделить уголком* (x^4+4) *на* (x^2-2x+2).

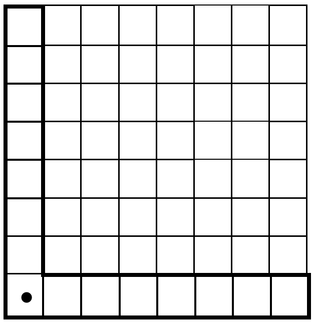
10.3. Дана трапеция $ABCD$ с углами A и D при основании AD, равными 60° и 45° соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке M. Найдите отношение площадей треугольников ABM и CDM.

Ответ: $\dfrac{S_{ABM}}{S_{CDM}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.4. Существует ли такое натуральное n, что сумма цифр каждого из чисел n и $n+1$ делится на 100?

Ответ: существует. **Решение.** Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n. Если n оканчивается не на 9, то $s(n+1)=s(n)+1$, и такое n не подходит. Пусть теперь n оканчивается на k девяток, т.е. имеет вид $n=\overline{m99...9}$ где m – натуральное число, оканчивающееся не на 9. Тогда $s(n)=s(m)+9k$, $s(n+1)=s(m)+1$. Вычитая эти числа, из условия задачи получим $9k-1=100\cdot l$ при некотором l. Возьмем $l=8$ (чтобы $100l+1$ делилось на 9, наименьшим l будет $l=8$). Отсюда $9k=801$ и $k=801:9=89$. Чтобы $s(n)$ делилось на 100, в силу равенства $s(n)=s(m)+801$ можно положить $s(m)=99$. Тогда m можно взять, например, 12-значным: $m=99...981$ (здесь 10 девяток) и значит, n будет 101-значным числом $n=99...98199...9$ (вначале 10 девяток, затем 8 и 1, в конце – 89 девяток), а можно m взять состоящим из 99 единиц, и тогда n будет 188-значным числом: $n=11…199...9$ (99 единиц и 89 девяток).

10.5. В некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставлены шашки. Для каждой из 64 клеток подсчитали число шашек в 15 клетках, находящихся с этой клеткой в той же строке или том же столбце. Могло ли оказаться так, что все эти 64 числа четные?



Ответ. Не могло. **Решение**. Для данной клетки A будем называть A-крестовиной все 15 клеток в той же строке или столбце, что и A (считая и саму клетку A). Неполной A-строкой будем называть 7 клеток в той же строке, что и A, но без самой клетки A. Аналогично определяется неполный A-столбец. Докажем, что не может на всех 64 крестовинах число шашек оказаться четным.

Действительно, предположим противное и рассмотрим произвольные A- и B-крестовины с клетками A и B из одного столбца. Тогда при вычитании числа шашек на этих крестовинах получим, что в неполных A- и B-строках число шашек одинаковой четности. Аналогично, для двух клеток A и B из одной строки число шашек в неполных A- и B-столбцах одинаковой четности.

Теперь рассмотрим какую-нибудь шашку на доске, пусть она находится в клетке A. Без ограничения общности можно считать, что A – угловая клетка (левая нижняя; этого можно добиться, переставив целиком на первое место строку и затем столбец, где находится A, при этом свойство четности для крестовин не меняется). По предположению, число шашек в A-крестовине четно, а значит, без самой шашки из клетки A число шашек на единицу меньше, и поэтому нечетно. Пусть для определенности число шашек в неполной A-строке (т.е. в первой строке), нечетно, а в неполном A-столбце (т.е. в первом столбце) четно. «Отрежем» от нашей доски каёмку из 15 клеток первой строки и первого столбца (см. рис.) и тогда на полученной доске 7×7 в каждой строке будет нечетное число шашек, а в каждом столбце – четное. Но это противоречит тому, что если подсчитать все шашки на этой доске 7×7 по строкам, то получится нечетная сумма (сумма семи нечетных чисел), а если по столбцам – то четная (сумма семи четных чисел). Противоречие доказывает наше утверждение.