Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный тур

2023 - 2024 учебный год

10 класс

Ответы и решения.

Максимальное количество баллов: 35 .

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача №1

Существует ли арифметическая прогрессия из 2023 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее, в свою очередь, меньше, чем количество чисел, делящихся на 10.

Ответ: существует.

Решение.

Рассмотрим последовательность

10; 50; 90; 130; 170; 210; 250; 290; …

$a_1 = 10$, $d = 40$. Так как $a_n = a_1 + d\ (n - 1)$ и a_1 не делится на 8, а d делится на 8, то a_n не делится на 8 при любом **n**. Некоторые члены последовательности, например, 90 делятся на 9. И все члены этой арифметической прогрессии делятся на 10.

Ответ: существует.

Задача №2

На доске были записаны пять чисел. Затем эти числа стерли и написали их попарные суммы: 4,8,10,12,14,18,19,21,25,29. Какие пять чисел были записаны на доске?

Ответ: 1, 3, 7, 11, 18.

Решение. Обозначим все искомые числа в порядке возрастания через $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ и\ x_5$:

$$x_1 < \ x_2 < \ x_3 < \ x_4 < \ x_5$$

Все неравенство здесь строгие, поскольку среди попарных сумм нет равных.

Проблема в том, что мы не знаем, при сложении каких чисел получилась сумма, равная, например, 10 или сумма, равная 12.

Наименьшая из всех попарных сумм является сумма $x_1 + x_2$.

В самом деле, если

$x_1 \le x_i\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5),\ \ x_2 \le x_k (k = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, то, складывая эти неравенства почленно, получим:

$$x_1 + x_2 \le x_i + x_k$$

Аналогично доказывается, что следующей по величине суммой является $x_1 + x_3$.

Далее, наибольшей из всех попарных сумм является $x_4 + x_5$, а предшествующей по величине сумма $x_3 + x_5$.

Мы получаем систему четырех уравнений с пятью неизвестными. Откуда взять пятое уравнение? Неясно, например, какая из сумм $x_1 + x_4$ и $x_2 + x_3$ больше; в общем случае может быть по-разному.

Если сложить все 10 попарных сумм, то новая сумма будет больше суммы всех пяти искомых чисел в 4 раза.

$x_1 + x_2 = 4$	$x_2 + x_3 = 14$	$x_3 + x_4 = 21$	$x_4 + x_5 = 29$
$x_1 + x_3 = 8$	$x_2 + x_4 = 18$	$x_3 + x_5 = 25$	
$x_1 + x_4 = 10$	$x_2 + x_5 = 19$		
$x_1 + x_5 = 12$			

$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 160$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40$

Имеем:

$\frac{1}{4} \cdot (4 + 8 + 10 + 12 + 14 + 18 + 19 + 21 + 25 + 29) = 40.$

Осталось решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_3 = 8 \\ x_4 + x_5 = 29 \\ x_3 + x_5 = 25 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40 \end{cases}$$

Кроме того, нужна проверка получающегося решения по попарным суммам, не вошедшим в систему.

Ответ: 1, 3, 7, 11, 18.

Задача №3

Найти все целые а, при которых уравнение $x^2 + ax + a = 0$ имеет целый корень.

Ответ: a = 0; a = 4.

Первое решение.

Пусть x_1 и x_2 - корни данного уравнения.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = a$, следовательно, $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 1 = -a + a + 1 = 1$.

Если данное уравнение имеет целый корень, то и второй корень - целый, поэтому числа $(1 + x_1)$ и $(1 + x_2)$ - целые,

значит либо $x_1 + 1 = 1$ и $x_2 + 1 = 1$,

либо $x_1 + 1 = -1$ и $x_2 + 1 = -1$.

В первом случае $x_1 = x_2 = 0,\ a = 0$, а во втором случае $x_1 = x_2 = -2,\ a = 4$.

Примечание.

Можно иначе:

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = a$, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = a, \end{cases}$, сложим равенства

$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0$, вынесем общий множитель $x_1 (x_2 + 1) + x_2 = 0$,

Прибавим 1 к обеим частям равенства $x_1 (x_2 + 1) + x_2 + 1 = 1$,

$x_1 (x_2 + 1) + (x_2 + 1) = 1$,

$(x_2 + 1)(x_1 + 1) = 1$, далее закончить решение 1 способом.

Второе решение.

Замечание. Квадратное уравнение (1) *может* иметь целые корни только в случае, если $D(a)$ полный квадрат.

Если квадратное уравнение имеет целый корень, то дискриминант его является квадратом целого числа b: $a^2 - 4a = b^2$. Перепишем это равенство в виде

$a^2 - 4a + 4 = b^2 + 4$

Откуда

$(a-2)^2 = b^2 + 4$,

$(a-2)^2 - b^2 = 4$,

$(a - 2 - b)(a - 2 + b) = 4$.

Сомножители левой части последнего равенства имеют одинаковую чётность, следовательно,

$\begin{cases} a-2-b=2 \\ a-2+b=2 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-2-b=-2 \\ a-2+b=-2 \end{cases}$

В первом случае $a = 4$, во втором случае $a = 0$.

Далее надо убедиться, что при этих значениях $a = 4$, $a = 0$, корни будут целыми, обратной подстановкой значений для a.

Если a = 0, то $x^2 = 0$, x = 0 - целый корень,

Если a = 4, то $x^2 + 4x + 4 = 0$, x = - 2 - целый корень.

Ответ: a = 0; a = 4.

Третье решение.

При рассмотрении условий для дискриминанта и его корней, необходимо учесть

Еще, что значения a и корень из дискриминанта принимают только четные значения. Это доказательство более громоздкое, и требует обоснования всех шагов для обоснованности решения.

Задача №4

Сколькими способами число 2023 можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

Ответ: 5 способами.

Решение.

Пусть (k +1) + (k +2) + … + (k +n) = 2023

k · n + (1 +2 +3 +…+ n) = 2023

$k \cdot n + \frac{n\,(n+1)}{2} = 2023$ (*)

n (2k + n +1) = 2 · 7 ·17 · 17

Значит, «n» может принимать значения 2; 7; 14; 17; 34.

При n = 2, получим (подставляя в *)

$2k + \frac{2 \cdot 3}{2} = 2023$; 2k +3 = 2023; k = 1010, тогда 2023 = 1011 + 1012.

При $n = 7$, $k \cdot 7 + \frac{7 \cdot 8}{2} = 2023$, откуда $k = 285$.

Тогда $2023 = 286 + 287 + 288 + 289 + 290 + 291 + 292$

При $n = 14$, $k \cdot 14 + \frac{14 \cdot 15}{2} = 2023$, откуда $k = 137$.

Тогда $2023 = 138 + 139 + 140 + \ldots + 151$.

При $n = 17$, $k \cdot 17 + \frac{17 \cdot 18}{2} = 2023$, откуда $k = 110$.

Тогда $2023 = 111 + 112 + \ldots + 127$.

При $n = 34$, $k \cdot 34 + \frac{34 \cdot 35}{2} = 2023$, откуда $k = 42$.

Тогда $2023 = 43 + 44 + \ldots + 76$.

При $n = 7 \cdot 17 = 119$, $k \cdot 119 + \frac{119 \cdot 120}{2} = 2023$, $119k + 7140 = 2023$,

откуда k – отрицательное, что противоречит условию.

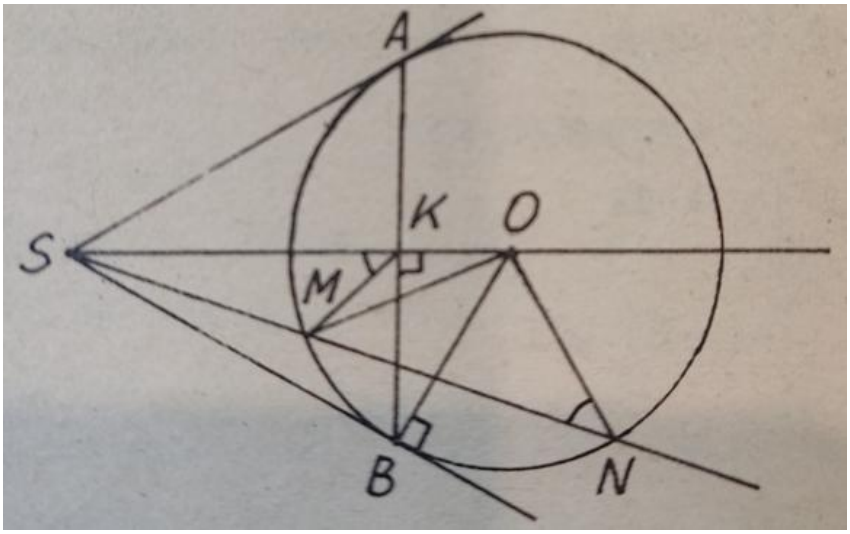
Значит, других вариантов для «n» быть не может.

Ответ: 5 способами.

Задача №5

Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B, и секущая, пересекающая окружность в точках M и N. Прямые AB и SO пересекаются в точке K.

Доказать, что точки M, N, K и O лежат на одной окружности.



Ответ: Доказали, что точки M, N, K и O лежат на одной окружности.

Решение.

По теореме о касательной и секущей $SM \cdot SN = SA^2$.

С другой стороны, поскольку AK – высота прямоугольного треугольника OAS , проведённая из вершины прямого угла, то

$SA^2 = SO \cdot SK$.

Поэтому, $SM \cdot SN = SO \cdot SK$,откуда $\frac{SK}{SN} = \frac{SM}{SO}$.

Кроме того, в ΔSON и ΔSMK общий угол $\angle KSM$, тогда $\Delta SON \sim \Delta SMK$ по второму признаку подобия, значит, $\angle SKM = \angle SNO$. В четырёхугольнике MKON

$\angle ONM + \angle MKO = \angle ONM + \angle 180^\circ - \angle SKM = 180^\circ$, поэтому около него можно описать окружность.

А это означает, что точки M , N , K и O лежат на одной окружности.

Ответ: Точки M , N , K и O лежат на одной окружности.