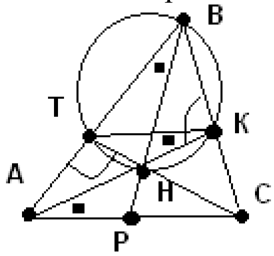
Решения заданий муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников Новосибирской области по математике 2023-2024 г.г.
Решение каждой задачи олимпиады оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Автомобиль движется в гору со скоростью 60 км/ч, под гору - со скоростью 90 км/ч, и по горизонтали - со скоростью 72 км/ч. Дорога из пункта А в пункт Б сначала идёт в гору, потом по горизонтали, и в конце под гору. Весь путь от А до Б занимает у машины 5 часов, а обратный из Б в А по той же дороге— 4 часа. Какова длина пути между А и Б?
Ответ. 324 километра.
Решение. Обозначим длины участков пути из А в Б в гору, под гору и по горизонтали за $a, b. c$, соответственно, тогда при возвращении из Б в А числа a и b меняются местами. Время в пути от А до Б равно $\frac{a}{60}+\frac{b}{90}+\frac{c}{72}=5$, а время от Б до А равно $\frac{a}{90}+\frac{b}{60}+\frac{c}{72}=5$.
Сложим эти равенства, получим $\frac{a}{60}+\frac{a}{90}+\frac{b}{90}+\frac{b}{60}+\frac{c}{72}+\frac{c}{72}=\frac{a}{36}+\frac{b}{36}+\frac{c}{36}=9$, откуда $a+b+c=324$ километра.

Критерии проверки. (●) Выписаны уравнения $\frac{a}{60}+\frac{b}{90}+\frac{c}{72}=5$ и $\frac{a}{90}+\frac{b}{60}+\frac{c}{72}=5$: 3 балла. **(●)** Приведён какой – ни будь верный пример пути от А до Б длины 324 км с разбиением на отрезки в гору, под гору и по равнине: 2 балла.

10.2. Отрезки АК, ВР и СТ – медианы треугольника АВС, в котором углы АКВ и АТС равны. Доказать, что углы АВР и САК также равны.



Доказательство. Обозначим точку пересечения медиан треугольника за Н. Ввиду равенства углов АКВ и АТС, сумма углов НКВ=АКВ и НТВ=180-АТС равна 180 градусов, значит четырёхугольник ВКНТ вписанный. Тогда угол АВР, равный вписанному углу ТВН, равен вписанному углу ТКН, опирающемуся на ту же хорду ТН. В силу параллельности средней линии ТК и стороны АС, угол ТКН, образующийся при пересечении ТН и АК, равен углу КАС, образующемуся при пересечении АК и АС. Отсюда следует равенство углов АВР и САК.
Критерии проверки. (●) Показана вписанность четырёхугольника ВКНТ: 4 балла. **(●)** Показано равенство углов ТКН, и АСК: 3 балла.

10.3. Найти все пятизначные натуральные числа N, в записи которых все цифры различны и нет нулей, обладающие следующим свойством: сумма всех трёхзначных чисел, образованных всевозможными тройками различных цифр из записи N во всевозможных порядках, равна N.
Ответ. N=35964.
Решение. Обозначим $N=\overline{abcde}$ - пятизначное число, записанное цифрами a, b, c, d, e

1) Если из этих цифр выбраны три фиксированных цифры x, y, z, то из них можно составить в различном порядке шесть разных трёхзначных чисел $\overline{xyz}, \overline{xzy}, \overline{yxz}, \overline{yzx}, \overline{zxy}, \overline{zyx}$, сумма которых равна $222 \cdot (x + y + z)$

2) Тройку цифр x, y, z можно выбрать из a, b, c, d, e десятью способами, при этом каждая из цифр a, b, c, d, e будет участвовать в 6 тройках, следовательно, общая сумма всех 60 полученных чисел равна $6 \cdot 222 \cdot (a + b + c + d + e) = 1332 \cdot (a + b + c + d + e)$, что должно равняться N.

3) Число 1332 делится на 9, значит и N делится на 9, следовательно и сумма его цифр $S = a + b + c + d + e$ делится на 9. С учётом того, что каждая цифра не превосходит 9 и все они различны, эта сумма не меньше 1+2+3+4+5=15 и не превосходит 5+6+7+8+9=35, значит, может принимать одно из значений 18 или 27, проверим их. Если $S = 18$, то $N = 1332 \cdot 18 = 23976$ - не подходит, так как сумма цифр полученного числа равна 27, а не 18. Если $S = 27$, то $N = 1332 \cdot 27 = 35964$ - подходит, так как его сумма цифр равна как раз 27. Таким образом, единственным ответом задачи является $N = 35964$.

Критерии проверки. (●) Пункт 1) стоит 1 балл. **(●)** Пункт 2) стоит 2 балла. **(●)** Замечено, что N делится на 9: 1 балл. **(●)** Доказано, что $S = a + b + c + d + e$ делится на 9: ещё 1 балл. **(●)** Доказано, что $S = a + b + c + d + e$ равно 18 или 27: ещё 1 балл. **(●)** Проверены значения 18 и 27 и выбран правильный ответ: ещё 1 балл.

10.4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, где $a \geq b \geq c$, выполняется неравенство:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}\,.$$

Доказательство. Способ 1. Поделим неравенство на c, и обозначим $\frac{a}{c} = x \geq 1, \frac{b}{c} = y \geq 1$, получим: $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}$. Проделаем с полученным неравенством равносильные преобразования. Обе части неравенства неотрицательны, возводим обе части в квадрат, $x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} \leq xy$, и преобразуем к виду $xy - x - y + 1 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 1 \geq 0$. Левая часть неравенства равна неотрицательному выражению $(\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1)^2$, поэтому полученное неравенство верно, а вместе с ним верно и исходное неравенство из условия.

Способ 2. Обозначим разности $a - c = x \geq 0, b - c = y \geq 0$ и перепишем неравенство в виде . $\sqrt{cx} + \sqrt{cy} \leq \sqrt{(c+x)(c+y)}$ Обе части неравенства неотрицательны, поэтому его можно возвести в квадрат $cx + cy + 2c\sqrt{xy} \leq c^2 + cx + cy + xy$. После сокращения и переноса в правую часть последнее эквивалентно верному неравенству $(c - \sqrt{xy})^2 \geq 0$.

Способ 3. Обозначим $\frac{c}{a} = x \leq 1, \frac{c}{b} = y \leq 1$, поделим неравенство на его правую часть, получим $\sqrt{y(1-x)} + \sqrt{x(1-y)} \leq 1$. Ввиду неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом, имеем $\sqrt{y(1-x)} \leq \frac{y+1-x}{2}, \sqrt{x(1-y)} \leq \frac{x+1-y}{2}$, поэтому $\sqrt{y(1-x)} + \sqrt{x(1-y)} \leq \frac{y+1-x}{2} + \frac{x+1-y}{2} = 1$, что и требовалось доказать. Применение неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом здесь корректно, так как все выражения $y, 1-x, x, 1-y$ неотрицательны.

Критерии проверки. **(●)** Если в третьем решении не сказано явно, что все выражения $y, 1-x, x, 1-y$ неотрицательны: минус 1 балл.

10.5. Некоторые клетки шахматной доски 8 на 8 отмечены так, что всего отмеченных клеток на доске меньше, чем неотмеченных, но в каждом квадрате доски размера 3 на 3 клетки отмеченных клеток больше, чем неотмеченных. Какое минимальное количество клеток может быть отмечено?

Ответ. 28.

Решение. Пример. Отметим все клетки вертикалей *c* и *f*, а также все клетки горизонталей 3 и 6, всего 28 клеток. Каждый квадрат 3 на 3 обязательно пересекается ровно с одной из этих горизонталей и ровно с одной из этих вертикалей, поэтому содержит ровно 3+3-1=5 отмеченных клеток.

Оценка. Разделим доску линиями сетки, проходящими между вертикалями *c*,*d* и *f*,*g*, а также между горизонталями 3,4 и 6,7 на девять частей, четыре из которых являются квадратами 3 на 3, ещё четыре – прямоугольниками 3 на 2, и одна – квадратом 2 на 2. По условию, каждый квадрат 3 на 3 содержит не меньше, чем по 5 отмеченных клеток. Каждый прямоугольник 3 на 2 содержит не меньше 2 отмеченных клеток, иначе содержащий его квадрат 3 на 3 содержал бы не больше 1+3=4 отмеченных клеток. Следовательно, указанные 8 квадратов и прямоугольников содержат не менее $4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 28$ отмеченных клеток.

Критерии проверки. **(●)** Пример для 28 отмеченных клеток: 3 балла. **(●)** Если пример отличен от авторского и неочевиден, за отсутствие обоснования снимаем 1 балл. **(●)** Оценка для 28: 5 баллов.