ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2023/2024 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Задания для обучающихся

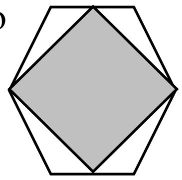
Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42

1. Приведите пример нечетного четырехзначного числа, которое при делении на сумму своих цифр дает квадрат натурального числа.

2. Обычно супруги Ивановы на ужин делят пиццу в определенном отношении. Но однажды муж был голоден, и съел на 20% больше, чем обычно. При этом супруге досталось на 30% меньше, чем обычно. Как обычно Ивановы делят пиццу?

3. В равносторонний шестиугольник вписан квадрат так, что две его вершины совпадают с вершинами шестиугольника, а две другие – с серединами сторон шестиугольника. Во сколько раз площадь этого квадрата больше площади оставшейся части шестиугольника?



4. На острове проживают рыцари и лжецы. 40 жителей встали в круг, повернувшись лицом к центру круга. Рыцарь Ланселот заметил: «от меня до ближайшего рыцаря против часовой стрелки столько же лжецов, сколько и до ближайшего рыцаря по часовой стрелке». После этого то же самое произнесли все остальные жители. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы – всегда ложь. Сколько рыцарей могло быть в этом круге? Найдите все варианты.

5. На доске написано уравнение $\sqrt{x^2+2ax+a^2}=x-b^2$. Сначала Петя заменяет параметр a некоторым числом, а затем Вася заменяет параметр b. Может ли Петя так выбрать значение a, чтобы при любых действиях Васи полученное уравнение не имело действительных корней?

6. На доске нарисована таблица 25х25, в одной из угловых клеток которой написано число 2023. Никита последовательно заполняет оставшиеся клетки таблицы по следующему правилу. Он выбирает любую пару соседних (по стороне) клеток, из которых одна уже заполнена некоторым числом x, а другая – еще не заполнена, и записывает в незаполненную клетку одно из чисел: $5x$ или x-21. Когда вся таблица заполнилась, он посчитал сумму всех чисел. Могла ли она оказаться равной 2024?

МАТЕМАТИКА
10 КЛАСС

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Приведите пример нечетного четырехзначного числа, которое при делении на сумму своих цифр дает квадрат натурального числа.

   Решение: Подходит, например, число 2023, поскольку частое от деления на 7 равно $289=17^2$. Есть и другие примеры.

   Критерии проверки: Любой верный пример с проверкой – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

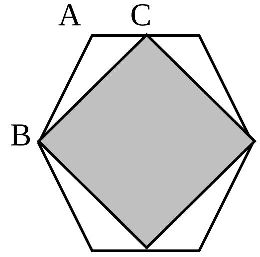
2. Обычно супруги Ивановы на ужин делят пиццу в определенном отношении. Но однажды муж был голоден, и съел на 20% больше, чем обычно. При этом супруге досталось на 30% меньше, чем обычно. Как обычно Ивановы делят пиццу?

   Ответ: Мужу – 60%, жене – 40%.
   Решение: Обозначим через x массу пиццы, пусть обычно p – доля мужа, $(1-p)$ – доля жены, $0<p<1$. Тогда в обычный день мужу достается px, а жене $(1-p)x$. В упомянутый день муж съел $1{,}2px$, а жена $0{,}7(1-p)x$. Составим уравнение: $1{,}2px + 0{,}7(1-p)x = x$. После очевидных преобразований получаем $p = 0{,}6$. Значит, мужу обычно достается 60% пиццы, а жене – 40%. (возможен ответ 3:2)

   Критерии проверки: Верное решение (ответ в любой форме: доли, проценты, части) – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. В равносторонний шестиугольник вписан квадрат так, что две его вершины совпадают с вершинами шестиугольника, а две другие – с серединами сторон шестиугольника. Во сколько раз площадь этого квадрата больше площади оставшейся части шестиугольника?

   Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$.



   Решение: Для начала заметим, что все белые треугольники равны по трем сторонам. Угол C в треугольнике ABC равен 45 градусов, поскольку сумма прямого угла и двух углов C дают развернутый угол. Обозначим AC=a, BC=b, тогда сторона шестиугольника равна $2a$.

Тогда по теореме косинусов получаем:

$$4a^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab.$$

Разделим на $a^2 \neq 0$, обозначим $\frac{b}{a} = t$ и получим уравнение $t^2 - \sqrt{2}t - 3 = 0$.

Находим корни: $t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{14}}{2}$. Отбрасываем отрицательный корень и остается $t = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$, значит, $b = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}a$.

Отсюда легко выразить $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+1}b = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{6}b$.

Площадь серого квадрата равна b^2. Площадь белого треугольника равна

$$\frac{1}{2}ab\sin 45^\circ = \frac{ab}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}-1}{12\sqrt{2}}b^2.$$

Суммарная площадь всех треугольников составляет $\frac{\sqrt{7}-1}{3\sqrt{2}}b^2$.

Значит, искомое отношение: $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, решение неверно – **0 баллов**.

4. На острове проживают рыцари и лжецы. 40 жителей встали в круг, повернувшись лицом к центру круга. Рыцарь Ланселот заметил: «от меня до ближайшего рыцаря против часовой стрелки столько же лжецов, сколько и до ближайшего рыцаря по часовой стрелке». После этого то же самое произнесли все остальные жители. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы – всегда ложь. Сколько рыцарей могло быть в этом круге? Найдите все варианты.

Ответ: 40 или 8.

Решение: Сначала заметим, что Ланселот не мог быть единственным рыцарем, так как в противном случае лжец, диаметрально противоположный ему, скажет правду. Предположим, что где-то есть два рыцаря, стоящие рядом. Тогда очевидно, что если у рыцаря правый сосед – рыцарь, то и левый должен быть рыцарем. В этом случае приходим к тому, что все жители, стоящие в круге – рыцари.

Пусть теперь никакие два рыцаря не стоят рядом. Очевидно, что тогда все рыцари стоят «на равном расстоянии друг от друга», то есть делят окружность на дуги, в которых стоит одно и то же количество лжецов. Далее заметим, дуга из подряд стоящих лжецов не может состоять из нечетного числа жителей. Действительно, в противном случае у лжеца, стоящего точно в центре этой дуги, справа и слева до ближайших рыцарей будет одинаковое количество лжецов и он скажет правду. Если n – число рыцарей в круге, то весь круг можно разделить на n одинаковых групп с нечетным количеством жителей (например, каждая группа – это рыцарь и вся дуга из лжецов по часовой стрелке от него). Поэтому количество людей в группе – нечетный делитель числа 40, больший 1. У числа 40 только один такой делитель - число 5. В этом случае получается, что всего имеется 8 рыцарей и между каждой парой стоит по 4 лжеца.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**. При переборном решении рассмотрены не все случаи, получен верный ответ – **не более 3 баллов**. Только верный ответ с обоснованием, что он подходит – **1 балл**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. На доске написано уравнение $\sqrt{x^2+2ax+a^2}=x-b^2$. Сначала Петя заменяет параметр a некоторым числом, а затем Вася заменяет параметр b. Может ли Петя так выбрать значение a, чтобы при любых действиях Васи полученное уравнение не имело действительных корней?

Ответ: Может.

Решение: Перепишем равенство в виде $|x+a|=x-b^2$ и рассмотрим графическую интерпретацию. График функции в левой части – это график функции $y=|x|$, сдвинутый на $|a|$ вправо, если $a<0$, либо на a влево, если $a>0$. График линейной функции из правой части – это график функции $y=x$, при b=0, либо сдвинутый вниз на b^2 во всех остальных случаях. Таким образом, очевидно, что если Петя заменит a каким-либо положительным числом, то при любых действиях Васи графики соответствующих функций не будут пересекаться, значит, уравнение не будет иметь корней.

Комментарий: для полного балла также достаточно выбрать конкретное положительное значение параметра a и доказать, что при всех b полученное уравнение не будет иметь корней (графически или аналитически).

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, подходящее значение a указано верно, но решение не достаточно обосновано – **5 баллов**, указано подходящее значение a без обоснования – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

6. На доске нарисована таблица 25x25, в одной из угловых клеток которой написано число 2023. Никита последовательно заполняет оставшиеся клетки таблицы по следующему правилу. Он выбирает любую пару соседних (по стороне) клеток, из которых одна уже заполнена некоторым числом x, а другая – еще не заполнена, и записывает в незаполненную клетку одно из чисел: $5x$ или x-21. Когда вся таблица заполнилась, он посчитал сумму всех чисел. Могла ли она оказаться равной 2024?

Ответ: не могла.
Решение: Заметим, что число 2023 делится на 7. Очевидно, что тогда при описанных операциях каждый раз будет записываться новое число, которое тоже кратно 7. Таким образом, после заполнения всей таблицы сумма всех чисел будет делиться на 7, но 2024 на 7 не делится.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.