Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023-2024 учебном году

10 класс

1. Выяснить, при каких условиях для параметров *a,b,c,d* параболы

$$y = x^2 + ax + b\,,\; y = x^2 + cx + d$$

не имеют общих точек.

Решение. Координаты точки пересечения линий должны удовлетворять системе, составленной из уравнений линий:

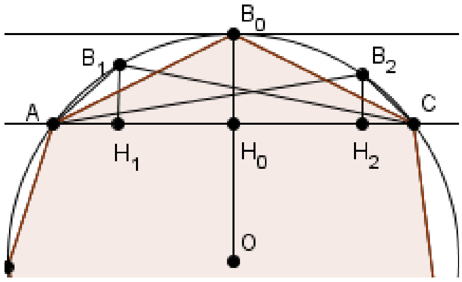
$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ y = x^2 + cx + d \end{cases} \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + cx + d \Leftrightarrow (a-c)x = (d-b)$$

Система не имеет решений, если не имеет их полученное из нее линейное уравнение, а это равносильно тому, что $a = c, b \neq d$.

Ответ. При $a = c, b \neq d$.

2. Показать, что из всех *n*-угольников с данным числом сторон *n*, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный *n*-угольник.

Решение. Рассмотрим некоторый *n*-угольник, вписанный в окружность с центром O и радиусом R и две его смежные стороны AB и BC. Зафиксируем все вершины многоугольника, кроме вершины B, которую будем смещать по дуге



AC с целью увеличения площади многоугольника. При указанных смещениях точки B (см. рис.) площадь многоугольника меняется лишь за счет площади ΔABC, которая (при фиксированном AC) меняется лишь за счет высоты ($S=\frac{1}{2}AC\cdot h_B$). Из всех треугольников с основанием AC и вершиной на дуге AC наибольшую площадь имеет равнобедренный ΔAB_0C, вершина B_0 которого лежит на серединном перпендикуляре к AC: серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности; касательная к окружности в т. B_0 параллельна AC, и в полосе между ними лежит вся дуга AC; B_0 – наиболее удаленная от прямой AC точка дуги AC.

Итак, если *n*-угольник, вписанный в окружность, имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в ту же окружность *n*-угольников, то равны между собой любые две его смежные стороны, значит, равны все стороны. Равенство углов вытекает из равенства центральных углов, опирающихся на равные стороны – хорды.

3. Не прибегая к приближенным вычислениям, сравнить числа

$$a = \sqrt{12} + 3, \quad c = \sqrt{32} + 1.$$

Решение. Из трех гипотез: $a < c,\quad a = c,\quad a > c,$ каждая из которых исключает две другие, проверим первую ($a < c$):

$$\left(\sqrt{12} + 3 < \sqrt{32} + 1\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{12} + 2 < \sqrt{32}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt{12} + 2\right)^2 < 32\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(12 + 4\sqrt{12} + 4 < 32\right) \Leftrightarrow \left(4\sqrt{12} < 16\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{12} < 4\right) \Leftrightarrow 12 < 16$$

– получили очевидно верное неравенство, поэтому верно и равносильное ему неравенство $a < c$.

Ответ. $a < c.$

4. В корзине 2021 белый шар, 2022 черных и 2023 красных. Какое наименьшее число шаров надо извлечь из корзины, чтобы среди них гарантированно оказались два шара одного цвета?

Решение. Четырех шаров достаточно: среди четырех шаров все шары не могут быть разных цветов (имеются шары трех цветов) и, значит, есть хотя бы два шара одного цвета. Если будут вынуты только три шара, то все они могут оказаться разных цветов (один белый, один черный, один красный), т.е. наличие одноцветной пары при выемке трех шаров не гарантировано.

Ответ. Четыре шара.

5. Решить в целых числах уравнение

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7(y-3)^2=30.$$

Возможны 3 случая:

1) $|y-3|=0$, 2) $|y-3|=1$, 3) $|y-3|=2$

В первом случае получим уравнение $2x^2+2x^2z^2+z^2=30$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2)=31$. Перебирая положительные множители числа 31, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

Во втором случае получим уравнение $2x^2+2x^2z^2+z^2=23$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2)=24$. Перебирая положительные множители числа 24, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

В третьем случае получим уравнение $2x^2+2x^2z^2+z^2=2$. Решая его как квадратное относительно x, получим $(2x^2+1)(1+z^2)=3$. Перебирая положительные множители числа 3, приходим к решениям:

1) $x=1, z=0$; 2) $x=-1, z=0$.

Вспоминаем, что в этом случае $|y-3|=2$, а следовательно, $y=5, y=1$.

Таким образом, получаем 4 решения: $(1;5;0), (-1;5;0), (1;1;0), (-1;1;0)$.

Ответ: $(1;5;0), (-1;5;0), (1;1;0), (-1;1;0)$.