Муниципальный этап 10 класс
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023 - 2024 учебный год

Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий
по математике в 10 классе

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

1. В магазине продаются капсулы, содержащие ровно по 3 маленьких куколки и гардероб к ним. Всего может встретиться 12 разновидностей таких маленьких куколок. В магазине в контейнере находится достаточно много капсул, причем в любых двух из них тройки куколок не одинаковы. Какое наименьшее количество капсул необходимо приобрести, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одной куколке всех разновидностей.

Решение.

Наибольшее число троек различных куколок, которые можно составить из 11 их разновидностей равно $C_{11}^3 = \frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1} = 165.$

Поэтому если купить не более 165 капсул, то может случиться, что все они составлены из не более, чем 11 разновидностей куколок. Если же купить 166 капсул, то такого случиться не может, а значит, среди них обязательно будут присутствовать все 12 имеющихся разновидностей маленьких куколок.

Ответ: 166.

2. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\frac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\frac{144}{17}$. Найдите первый член и знаменатель этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Решение.

Известно, что сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1}{1-q}$.

Кубы членов данной прогрессии $\{b_n\}$ также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3, четвертые степени членов – прогрессию с первым членом b_1^4 и знаменателем q^4, а квадраты - прогрессию с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Все эти прогрессии тоже будут бесконечно убывающими. Суммы членов этих прогрессий равны соответственно $\frac{b_1^3}{1-q^3}$, $\frac{b_1^4}{1-q^4}$, $\frac{b_1^2}{1-q^2}$.

Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1^3}{1-q^3} : \frac{b_1}{1-q} = \frac{48}{7} \\ \frac{b^4}{1-q^4} : \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{144}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = \frac{48}{7} \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{144}{17} \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе и получаем

$\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{17}{21}$, $4q^2 - 17q + 4 = 0$, откуда $q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$.

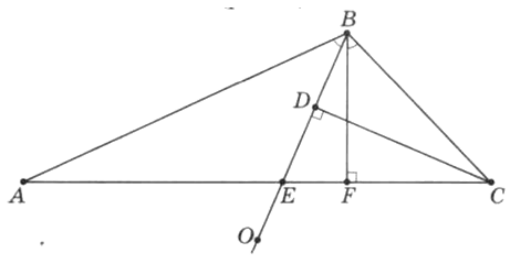
Так как прогрессия является бесконечно убывающей, то должно выполняться условие $|q| < 1$.

Следовательно, подходит только значение q = $\frac{1}{4}$. Тогда $b_1^2 = \frac{144}{17}$ (1+ q^2) =9, $b_1 = \pm 3$.

Ответ: $b_1 = \pm 3$, q = $\frac{1}{4}$.

3. Из вершины B треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке E. Найдите высоту BF треугольника ABC, если известно, что центр, описанной вокруг треугольника ABC окружности, лежит на луче BE, причем AF · FE = 5 и ctg < EBC: ctg < BEC = 3:4.

Решение.



Из точки C опустили перпендикуляр CD на прямую BE. Тогда из отношения котангенсов, во-первых, следует, что углы EBC и BEC – острые (следовательно, точка D лежит внутри отрезка BE), а, во-вторых, что BD : DE = 3 : 4, то есть DE > BD. Поэтому EC > BC и так как BC > CF (гипотенуза больше катета), то EC > CF, то есть точка F лежит между точками E и C.

По условию, центр описанной окружности лежит на BE, следовательно, углы ABE и FBC равны.

Отсюда вытекает подобие:

Δ ABF ~Δ CBD $\Longrightarrow \frac{BF}{AF} = \frac{BD}{CD}$;

Δ FBE ~Δ DCE $\Longrightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{DC}{DE}$;

Перемножив полученные равенства почленно, получим:

$\frac{\mathrm{BF}^2}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FE}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}$ BF=$\sqrt{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{FE}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}}} = \sqrt{5\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

4. Натуральные числа, начиная с 20, выписали в одну сторону: 20212223…

Какая цифра стоит в получившейся последовательности цифр на 2021 месте?

Решение.

Цифры чисел с 20 до 99 занимают в этом ряду первые 80 · 2=160 мест. Среди остальных 2021 – 160 = 1861 мест цифры чисел от 100 до 719 занимают следующие (719 – 99) · 3 = 1860 мест. Значит, на 2021 месте стоит первая цифра числа 720, то есть цифра 7.

Ответ: 7.

5. Все числа от 1 до 900 ученик 6 класса Артем записал в клетки таблицы 30x30. Его друг Максим закрасил в этой таблице три столбца, а Артем выделил в таблице три строки. Затем мальчики подсчитали сумму девяти чисел, стоящих на пересечении отмеченных строк и столбцов. Определите, сможет ли Артем добиться того, чтобы сумма этих чисел делилась на 3000, если он сам выбирает, как расставлять числа в таблице.

Решение.

Пусть Артем запишет в первую строку слева направо числа 1, 2, 3, …, 30, во вторую - слева направо числа 99, 100, 101, …, 128, а в третью – слева направо числа 900, 898, 896, …, 842; остальные клетки таблицы Артем может заполнить произвольно. Тогда тройки чисел, стоящих в одном столбце в первых трех строках, имеют одинаковую сумму: $1 + 99 + 900 = 2 + 100 + 898 = 3 + 101 + 896 = … = 30 + 128 + 842 = 1000$. Теперь какие бы три столбца ни выбрал бы Максим, Артем должен выбрать три первые строки. Тогда сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении, будет равна $1000 \cdot 3 = 3000$.

Ответ: может.