Пермский край
2023-2024 учебный год

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
10 КЛАСС

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).
Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий – 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

10.1. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?
Ответ. Да, могут.
Решение. Пусть 1 – длина меньшего катета, q – длина большего катета (следовательно, $q>1$), а q^2 – длина гипотенузы. По теореме Пифагора $q^4=1+q^2$; решением этого уравнения является, в частности, число $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}>1$.
Критерии оценки. Если доказано только существование прогрессии без приведения конкретного примера, это не снижает оценки. Но если при этом предпринята попытка привести пример и в ней имеются ошибки, то снижает на 1-2 балла.

10.2. Найти все целые числа n,m, для которых справедливо равенство $(n+m)(n^2-m^2)=2023$.
Ответ. Задача имеет четыре решения: $n=12, m=5$; $n=-5, m=-12$; $n=1012, m=-1011$; $n=1011, m=-1012$.
Решение. Перепишем исходное равенство в виде $(n+m)^2(n-m)=2023$. Так как $2023=7\cdot17\cdot17$, то существует два и только два представления числа 2023 в виде произведения двух чисел, одно из которых есть точный квадрат: $2023=17^2\cdot7$ и $2023=1^2\cdot2023$. Следовательно, либо $n+m=\pm17, n-m=7$, либо $n+m=\pm1, n-m=2023$. Каждая из этих четырех систем имеет единственное решение, откуда и получаются приведенные выше ответы.
Критерии оценки. Один или несколько ответов (в том числе все ответы без доказательства того, что это все) – не более 3 баллов. Представление равенства в виде $(n+m)^2(n-m)=2023$ - 1 балл, попытка использовать разложение $2023=7\cdot17\cdot17$ - 1 балл, каждое из равенств $2023=17^2\cdot7$ и $2023=1^2\cdot2023$ - еще по 1 баллу. Все эти баллы суммируются, далее оценка зависит от того, сколько найдено решений.

10.3. Дана трапеция $ABCD$ (AD||BC), в которой $AB=BC=CD$. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CH, а M – середина диагонали BD. Докажите, что $MH\perp AC$.
Решение. Обозначим $N=MH\cap AC$, а $\angle CAD=\alpha$. Поскольку $\angle ACH=90°-\alpha$, для решения задачи достаточно рассмотреть треугольник $\triangle HNC$ и показать, что в нем $\angle NHC=\alpha$. Заметим, что $\angle BDA=\alpha$ (так как треугольники ACD и DBA равны по трем сторонам), $\angle CDA=2\alpha$ (так как углы $\angle CBD$ и $\angle ADB$ внутренние накрест лежащие при параллельных прямых, а ΔBCD равнобедренный). Учитывая, что $CH\perp AD$ и $CM\perp BD$, получаем: $\angle MCH=\angle MCD-\angle HCD=(90°-\alpha)-(90°-2\alpha)=\alpha$. Так как M – середина BD, то M лежит на средней линии трапеции $ABCD$, следовательно, $CM=MH$, ΔHMC-

равнобедренный и $\angle MHC = \alpha$. Мы получили, что $\angle NCH = 90° - \alpha$ и $\angle NHC = \alpha$. Значит, $\angle HNC = 90°$, т.е. $MH \perp AC$.
Критерии оценки. Могут оцениваться небольшие продвижения, как из числа указанных в приведенном выше решении, так и другие, ведущие к решению, например, доказательство, что вокруг четырёхугольника *CMHD* можно описать окружность.

10.4. Доказать, что для любых $a > 0, b > 0$ и любого натурального числа n справедливо неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n + b^n}{2}$.

Решение. Не нарушая общности, считаем, что $a \ge b$. Обозначим $c = \frac{a+b}{2}$, тогда требуемое неравенство можно переписать в виде $2c^n \le a^n + b^n$. Легко видеть, что

$$a^n - c^n = (a-c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + ... + ac^{n-2} + c^{n-1}),$$
$$b^n - c^n = (b-c)(b^{n-1} + b^{n-2}c + ... + bc^{n-2} + c^{n-1}).$$

Складывая полученные равенства и учитывая, что $a - c \ge 0$, а $b - c = -(a-c)$, получаем

$$a^n + b^n - 2c^n = (a-c)\Big((a^{n-1} - b^{n-1}) + c(a^{n-2} - b^{n-2}) + ... + c^{n-2}(a-b)\Big) \ge 0,$$

что и требовалось.
Критерии оценки. В решении могут быть использованы свойства Бинома Ньютона. Если они не доказаны, баллы не снимаются.

10.5. По доске 3x3 катается кубик. Грани кубика совпадают по размерам с клетками доски, и после каждого хода нижняя грань кубика в точности покрывает одну из клеток. Одна из граней кубика синяя, остальные белые. Когда грань кубика ложится на клетку доски, клетка приобретает цвет грани. Изначально кубик находится в угловой клетке доски синей гранью книзу. Какое максимальное количество клеток доски могут быть синими после нескольких ходов?

Ответ. Максимальное число закрашенных клеток – 6 .
Решение. Покажем, что а) сделать 6 клеток синими можно и б) большее количество клеток сделать синими нельзя.
а) Для удобства расположим доску вертикально и будем считать, что изначально кубик находится в левой верхней угловой клетке. Повторяя 2 раза последовательность перекатываний ВНИЗ-ВПРАВО-ВВЕРХ, закрашиваем 3 верхних клетки доски. Затем катим кубик ВНИЗ-ВЛЕВО-ВЛЕВО-ВНИЗ-ВПРАВО-ВПРАВО – теперь он находится в правом нижнем углу синей гранью книзу. Повторяя 2 раза последовательность перекатываний ВВЕРХ-ВЛЕВО-ВНИЗ, закрашиваем 3 нижних клетки доски, – теперь 6 клеток являются синими.
б) Рассмотрим три клетки, которые приобрели синий цвет последними. Перекатывая кубик от предпоследней синей клетки к последней, необходимо было как минимум две клетки сделать белыми (назовём их клетками А и Б). Допустим, удалось обойтись этими двумя клетками (иначе более шести клеток синими не сделать). Но тогда, чтобы перекатить кубик от третьей с конца синей клетки к предпоследней, тоже необходимо было как минимум две клетки сделать белыми; при этом, если их ровно две, то не более чем одна из них совпадает с одной из клеток А и Б (иначе третья с конца синяя клетка совпадает с последней). Поэтому как минимум 3 клетки являются белыми.
Критерии оценки. Только ответ – 1 балл, ответ и один из пунктов а) и б) без другого – 3 балла, оба пункта а) и б) – 7 баллов.