10 класс

1. Найдите такое натуральное x, что значение выражения $2^x + 2^8 + 2^{11}$ является квадратом натурального числа.

   Решение. Заметим, что $2^8 + 2 \cdot 2^{10} + 2^x = \left(2^4\right)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^x$. Ясно, что при $x = 12$ последнее выражение будет являться полным квадратом $\left(2^4 + 2^6\right)^2 = \left(2^4\right)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + \left(2^6\right)^2$. **Ответ:** $x = 12$.

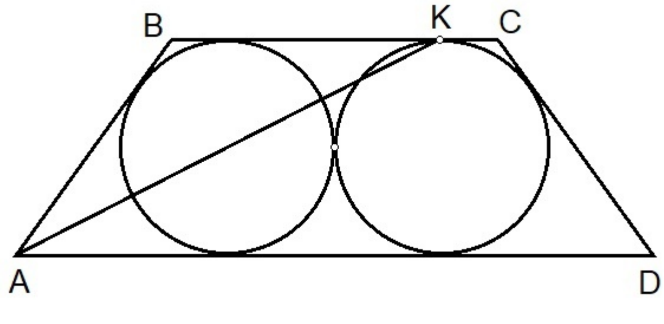
2. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, у которых $p + \dfrac{1}{3}q = 2023$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

   Решение. Рассмотрим значение трёхчлена в точке $x_0 = 3$. Тогда $y(3) = 3^2 + 3p + q = 9 + 3(p + \frac{q}{3}) = 9 + 3 \cdot 2023 = 6078$. Таким образом, графики всех трёхчленов проходят через точку $(3; 6078)$.

3. Натуральное число n таково, что $n^2 + 1$ – десятизначное число. Верно ли, что в числе $n^2 + 1$ всегда найдутся одинаковые цифры?

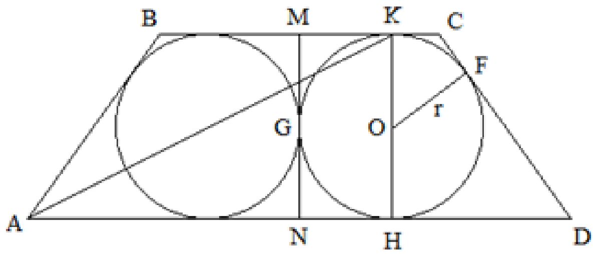
   Решение. Предположим, что одинаковых цифр нет. Тогда сумма цифр этого десятизначного числа равна 45 (0+1+2+...+9), а значит, само число $n^2 + 1$ должно делиться на 3. Но квадрат натурального числа может давать остатки только 0 или 1 при делении на 3. Значит, $n^2 + 1$ даёт только остатки 1 или 2 и не может делиться на 3. Противоречие. **Ответ:** верно.

4. Биссектриса острого угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает её основание в точке K. В этой трапеции расположены две равные окружности радиуса r, касающиеся её сторон и друг друга, причем K - одна из точек касания. Найдите площадь трапеции $ABCD$.



   Решение. AK – биссектриса угла $\angle BAD$, значит, $\angle BAK = \angle KAH$. Основания AD и BC трапеции параллельны, значит, $\angle KAH = \angle AKB$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$, и треугольник ABK – равнобедренный. Пусть $CF = x, FD = y$, радиус окружности – r, тогда, учитывая, что отрезки касательных равны и треугольник ABK равнобедренный, $BC = 2x + y$.

С другой стороны, учитывая, что точка M – середина основания BC, получим $BC = 2x + 2r$, поэтому $y = 2r$.



Из подобия четырехугольников $CFOK$ и $OFDH$ следует пропорциональность сторон $\frac{x}{r} = \frac{r}{y}$, откуда $x = \frac{r^2}{y} = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2}$.

Найдем основания трапеции $BC = 2(x + r) = 2(\frac{r}{2} + r) = 3r$, $AD = 2(y + r) = 2(2r + r) = 6r$.

Теперь найдем площадь трапеции $ABCD$, воспользовавшись формулой площади $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot KH = \frac{1}{2}(3r + 6r) \cdot 2r = 9r^2$. **Ответ:** $9r^2$.

5. Найдите все пары $(x; y)$ действительных чисел, удовлетворяющие условиям: $x^3 + y^3 = 1$ и $x^4 + y^4 = 1$.

   Решение. Из второго равенства следует, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. При этом, для того, чтобы выполнялось первое равенство, необходимо, чтобы хотя бы одно из чисел x и y было положительным. Так как оба равенства симметричны относительно переменных, то пусть $0 < x \leqslant 1$. Тогда $0 < x^3 \leqslant 1$, откуда $0 \leqslant 1 - x^3 < 1$, то есть $0 \leqslant y^3 < 1$, значит, $0 \leqslant y < 1$.

   Так как $0 < x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y < 1$, то $x^4 \leqslant x^3$ и $y^4 \leqslant y^3$, причем оба равенства одновременно достигаются только при $x = 1$ и $y = 0$. Учитывая симметричное решение $x = 0$, $y = 1$, получим ответ. **Ответ:** $(1; 0), (0; 1)$.