

# Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

## Ответы и решения

### Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В таблице критериев по каждой задаче баллы не суммируются, то есть при применении критерия на большее количество баллов критерии на меньшее число баллов не дают вклада в результат.

4) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

5) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а жюри выставяет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено. Финальная оценка является целым числом от 0 до 7.

6) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

7) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

8) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

9) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2023 – 2024 учебном году  
10 класс**

*Время выполнения заданий – 4 часа*

**10.1.** В кошельке лежит 26 монет номиналами 1, 2 или 5 рублей. Известно, что если вытаскивать из кошелька монеты по одной, не глядя, то среди 20-и первых вытащенных окажется, как минимум, 1 монета достоинством в один рубль, 2 монеты достоинством в два рубля и 5 монет достоинством в пять рублей. Сколько денег в кошельке? Ответ обоснуйте.

**Решение:** Однорублёвых монет не меньше семи, так как в противном случае может оказаться, что все эти монеты останутся в кошельке после того, как оттуда будут извлечены 20 остальных. Двухрублёвых — не меньше 8 по аналогичным соображениям: будь их меньше, мы бы оставили в кошельке 6 из них, и среди вытащенных монет не найдётся двух достоинством в 2 рубля. Если однорублёвых монет больше 7, или двухрублёвых больше 8, то пятирублёвых меньше, чем  $26 - 7 - 8 = 11$ . Тогда может случиться, что 6 из них остались в кошельке, и извлечёнными оказались остальные, в количестве не больше 4 — противоречие. Значит, в кошельке ровно 7 монет достоинством в один рубль ровно 8 достоинством в 2 рубля и ровно 11 достоинством в 5 рублей. Общая сумма денег в кошельке  $7 + 2 \cdot 8 + 5 \cdot 11 = 78$  рублей.

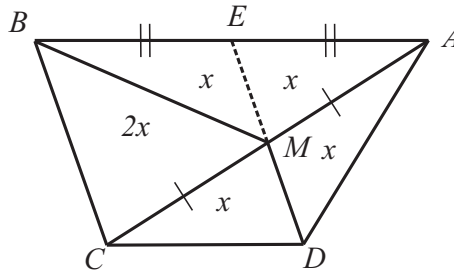
**Ответ:** 78 рублей.

Рекомендации по проверке:

<b>есть в работе</b>	<b>баллы</b>
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно приведшие к неверному ответу	–1 балл за каждую
Верно указано число монет в кошельке каждого достоинства: одно-, двух- и пятирублёвых, но не обоснована единственность примера	4 балла
Доказаны два из трёх утверждений: а) однорублёвых монет не меньше семи, б) двухрублёвых монет не меньше 8, в) пятирублёвых монет не меньше 11	2 балла
Доказано хотя бы одно из трёх утверждений а), б) или в) (см. критерий на 2 балла)	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

**10.2.** В трапеции  $ABCD$  ( $AB$  и  $CD$  — основания)  $M$  — середина диагонали  $AC$ , и площади треугольников  $ABM$  и  $ACD$  равны. Докажите, что прямые  $DM$  и  $BC$  параллельны.

**Решение:** Соединим точку  $M$  с вершинами  $B$  и  $D$  и продолжим отрезок  $DM$  до пересечения со стороной  $AB$  в некоторой точке  $E$  — см. рисунок.



К решению задачи 10.2

Пусть площадь треугольника  $ACD$  равна  $2x$ . Так как медиана делит площадь треугольника пополам,  $S_{DMC} = S_{DMA} = x$  и  $S_{BMC} = S_{BMA} = 2x$ . Треугольники  $AME$  и  $DMC$  равны по стороне ( $AM = MC$ ) и двум прилежащим к ней углам ( $\angle AME = \angle DMC$ , как вертикальные;  $\angle EAM = \angle MCD$ , как внутренние накрест лежащие при параллельных  $AB$  и  $CD$  и секущей  $AC$ ). Значит,  $S_{AME} = S_{DMC} = x$ . Тогда  $S_{MBE} = 2x - x = x$ , то есть отрезок  $ME$  делит треугольник  $BMA$  на два треугольника одинаковой площади. Тогда  $ME$  — медиана треугольника  $BMA$ , точка  $E$  — середина отрезка  $AB$ , а тогда  $ME$  — средняя линия треугольника  $ABC$ . Значит, прямая  $ME$  (она же — прямая  $MD$ ) параллельна стороне  $BC$ , что и требовалось доказать.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что основание $AB$ в 2 раза больше основания $CD$	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

**10.3.** а) Существует ли функция  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такая, что для всех  $x \in \mathbf{R}$  выполняется равенство  $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$ ?

б) Существует ли функция  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  такая, что для всех  $x \in \mathbf{R}$  выполняется равенство  $f(\sin x) - f(\cos x) = 1$ ? Ответы обоснуйте.

**Решение:** а) Годится  $f(x) = x^2$ . В этом случае  $f(\cos x) = \cos^2 x$ ,  $f(\sin x) = \sin^2 x$ , и равенство  $f(\sin x) + f(\cos x) = 1$  превращается в основное тригонометрическое тождество.

б) Пусть  $f(x)$  — требуемая функция. Тогда при  $x = 0$  имеем

$$1 = f(\sin x) - f(\cos x) = f(\sin 0) - f(\cos 0) = f(0) - f(1).$$

Аналогично, при  $x = \frac{\pi}{2}$  получим

$$1 = f(\sin x) - f(\cos x) = f\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - f\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) = f(1) - f(0).$$

Из полученных двух равенств получаем, что разность  $f(1) - f(0)$  должна одновременно равняться 1 и  $-1$ , что невозможно.

**Ответ:** а) Существует. б) Не существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ на оба пункта	7 баллов
Верно и обосновано решён пункт «б»	4 балла
Верно и обосновано решён пункт «а»	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

**10.4.** Имеется 11 таких натуральных чисел, что суммы любых двух из них попарно различны. Докажите, что разность каких-то двух из них больше 27.

**Решение:** Предположим противное. Тогда разность между наименьшим и наибольшим числом не больше 27. Обозначим наименьшее из 11-и данных чисел через  $n$ . Значит, каждое из этих чисел находится на отрезке  $[n; n + 27]$ , причём число  $n + 27$  может и не достигаться. Заметим, что все 11 чисел попарно различны, поскольку в противном случае среди попарных сумм будут и одинаковые, что противоречит условию задачи. Наименьшая возможная сумма пары чисел из набора равна  $n + (n + 1) = 2n + 1$  а наибольшая сумма не превосходит числа  $(n + 27) + (n + 26) = 2n + 53$ . Всего различных сумм, таким образом, будет не более  $2n + 53 - 2n = 53$ . Но, с другой стороны, различных пар в наборе ровно  $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ . Значит, по принципу Дирихле среди них есть по крайней мере две с одинаковой суммой. Противоречие с условием задачи.

**Примечание:** Оценка 27 не является точной; наибольшая из попарных разностей значительно больше. Точная оценка авторам пакета неизвестна.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Примеры конкретных наборов чисел и/или рассуждения, не приведшие к идее доказательства	0 баллов

**10.5.** Из одной точки круговой дорожки ледового стадиона в одном направлении одновременно стартовали два конькобежца. Первый бежит равномерно, и пробегает круг за 40 сек. Второй начинает быстрее, и первый круг пробегает за 30 сек, но в дальнейшем его скорость падает (не обязательно равномерно); при этом на каждый следующий круг он тратит ровно на 1 сек больше, чем на предыдущий.

а) Через сколько секунд с момента начала бега оба конькобежца впервые одновременно окажутся в точке старта?

б) Сколько раз они одновременно окажутся в точке старта, если будут бегать в течение 1 часа?

Ответы обоснуйте.

**Решение:** Пусть второй конькобежец пробежал ровно  $n$  кругов. На этот пробег он потратил времени (в секундах) ровно

$$\begin{aligned} 30 + (30 + 1) + (30 + 2) + \dots + (30 + n - 1) &= \\ &= 30n + (1 + 2 + \dots + (n - 1)) = 30n + \frac{n(n - 1)}{2} = \frac{(59 + n)n}{2}. \end{aligned}$$

Сейчас он находится в точке старта. Для того, чтобы первый конькобежец также был в точке старта, необходимо и достаточно, чтобы найденное время нацело делилось на 40, то есть чтобы число  $(59 + n)n$  было кратно 80. Найдём такие  $n$ . Так как числа  $n$  и  $59 + n$  разной чётности, одно из них должно быть кратно 16. Также одно из них делится без остатка на 5. Возможно четыре случая:

1)  $n$  делится и на 16 и на 5 без остатка, то есть  $n$  кратно 80.

2)  $n + 59$  делится и на 16 и на 5 без остатка. Тогда  $n + 59$  делится на 80, также на 80 делится и  $n + 59 - 80 = n - 21$ , то есть  $n$  при делении на 80 даёт в остатке 21.

3)  $n$  делится на 16, а  $n + 59$  — на 5. Тогда  $n$  чётно, и последняя цифра нечётного числа  $n + 59$  равна 5. Значит, число  $n$  оканчивается цифрой 6 и из его делимости на 16 следует что  $n = 16, 96, 176, \dots$ . Иными словами,  $n$  при делении на 80 даёт в остатке 16.

4)  $n$  делится на 5, а  $n + 59$  (а, значит, и  $n - 5$ ) кратно 16. Отсюда  $n - 5 = 16t$ , где  $t$  — целое, то есть  $n = 16t + 5$ . Для делимости  $n$  на 5 в этом случае необходимо и достаточно, чтобы  $t$  было кратным 5, то есть  $n$  должно давать в остатке 5 при делении на 80.

Окончательно имеем: конькобежцы оказываются одновременно в точке старта, когда количество кругов, сделанное вторым конькобежцем при делении на 80 даёт один из четырёх остатков: 0, 5, 16 или 21. Впервые это случится, когда второй конькобежец пробежит 5 кругов; ему на это потребуется  $\frac{(59 + 5) \cdot 5}{2} = 160$  сек, или 2 мин 40 сек. Это — ответ на пункт «а».

Для ответа на пункт «б» найдём, сколько полных кругов пробежит второй конькобежец за час. Это — наибольшее натуральное  $n$ , удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(59 + n)n}{2} \leq 3600.$$

Заметим, что неравенство выполнено при  $n = 60$  и не выполнено при  $n = 61$ . Значит, за час второй конькобежец пробежит 60 полных кругов. Одновременно с первым он будет в точке старта всего три раза: после 5 кругов, после 16 кругов и после 21 круга.

**Ответ:** а) через 240 сек; б) 3 раза.

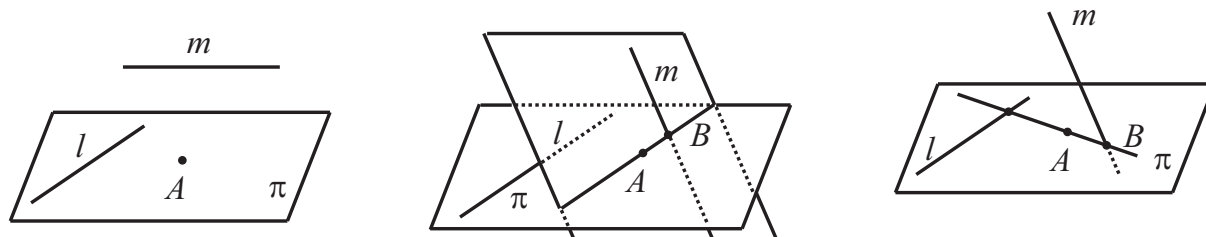
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ на оба пункта	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно приведшие к неверному ответу	–1 балл за каждую
Верно и обоснованно решён пункт «б»	5 баллов
Задача верно сведена к уравнению в целых числах и верно решён пункт «а»	4 балла
Задача верно сведена к уравнению в целых числах ИЛИ верно и обоснованно решён пункт «а» и найдено количество полных кругов, которые второй конькобежец пробежал за час	3 балла
Верно и обоснованно решён пункт «а»	2 балла
Найдено количество полных кругов, которые второй конькобежец пробежал за час	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

**10.6.** Даны две скрещивающиеся прямые  $l$  и  $m$ . Укажите геометрическое место таких точек  $A$ , что существует единственная прямая, проходящая через точку  $A$  и пересекающая обе прямые  $l$  и  $m$ .

**Решение:** Точка  $A$  не лежит ни на одной из прямых  $l$  и  $m$  — иначе прямых, пересекающих  $l$  и  $m$  бесконечно много. Значит, существует единственная плоскость, проходящая через точку  $A$  и прямую  $l$  — плоскость  $\pi$ . Любая прямая, которая проходит через точку  $A$  и пересекает прямую  $l$ , обязана лежать в плоскости  $\pi$ ,

так как имеет с этой плоскостью две общие точки: точку  $A$  и точку пересечения с прямой  $l$ .



К решению задачи 10.6

Значит, если прямая  $m$  параллельна плоскости  $\pi$ , то нужных нам прямых нет (см. рисунок слева). В плоскости  $\pi$  прямая  $m$  не лежит, так как она скрещивается с прямой  $l$ . Поэтому  $m$  должна пересекать плоскость  $\pi$  в единственной точке  $B$ . Прямая  $AB$  не совпадает с прямой  $l$ , поэтому если  $AB \parallel l$  (см. рисунок в центре), то прямых, пересекающих обе прямые и  $l$ , и  $m$  снова нет, а если  $AB \not\parallel l$  (см. рисунок справа) — то такая прямая единственна. Ещё заметим, что первый случай возникает тогда и только тогда, когда плоскость, проходящая через точку  $A$  и прямую  $m$ , параллельна прямой  $l$ .

**Ответ:** Все точки пространства за исключением двух плоскостей: плоскости, проходящей через прямую  $l$  параллельно прямой  $m$  и плоскости, проходящей через прямую  $m$  параллельно прямой  $l$ .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Приведён верный ответ и доказано, что любая точка предъявленного множества удовлетворяет условию задачи	4 балла
Доказано, что в плоскости, проходящей через одну из прямых параллельно другой прямой, точка $A$ не лежит	3 балла
Верный ответ без обоснования (с неверным обоснованием) и/или доказано, что точка $A$ не может лежать на прямых $m$ и $l$	1 балл
Рассуждения и выкладки, не приведшие к идее решения	0 баллов