10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1010, 1011, 1012, 1013.

Решение. Заметим, что если в обеих группах есть по чётному числу, то оба произведения чётны, их разность чётна и не может равняться 2023. Поэтому в одной группе чётные, в другой – нечётные числа. Пусть эти числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Произведение в одной группе равно $(n-1)(n+1) = n^2-1$, в другой – $n(n+2) = n^2+2n$. Из условия следует, что

$$2023 = (n^2+2n) - (n^2-1) = 2n+1,$$

отсюда $n = 1011$. Поэтому искомые числа – 1010, 1011, 1012, 1013.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Рассмотрен только один (из трёх) способов разбиения на две группы — снимается 2 балла. Доказано, что числа можно разбить только на группы $n-1$, $n+1$ и n, $n+2$ — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. Даны различные действительные числа a и b. Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x+a)(x+b) = x-a$, $(x-a)(x-b) = x+b$ имеет решение?

Ответ: *верно.*

Первое решение. Обозначим $f_1(x) = (x+a)(x+b)-(x-a)$ и $f_2(x) = (x-a)(x-b)-(x+b)$. Предположим, утверждение задачи неверно, то есть оба уравнения не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны, то есть $(a+b-1)^2 < 4(ab+a)$ и $(a+b+1)^2 < 4(ab-b)$. Эти неравенства можно переписать в виде:

$$(a-b-1)^2 < 4a+4b \quad \text{и} \quad (a-b-1)^2 < -4a-4b.$$

Значит, оба числа в правых частях положительны, чего быть не может, так как их сумма равна нулю. Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении предположим, что f_1 и f_2 не имеют корней. Поскольку старшие коэффициенты этих квадратных трёхчленов положительны, получаем, что $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ *при всех* x. Однако $f_1(-b) = a+b$ и $f_2(a) = -(a+b)$, то есть

$$f_1(-b) + f_2(a) = 0,$$

и значит, неверно, что $f_1(-b) > 0$ и $f_2(a) > 0$. Противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Рассмотрена сумма дискриминантов исходных квадратных трёхчленов — 2 балла. Замечено (в предположении от противного), что $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ *при всех* x — 1 балл. Доказано утверждение для частных случаев ($a > -b$ или аналогичные) — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 145 *паромов.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{11}$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $20 - x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет $x_i + 1$ городов и из города A будет выходить $20 - (x_i + 1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$20 - (x_i + 1) < 20 - x_j \quad \Longleftrightarrow \quad x_j < x_i + 1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается*. Значит, наименьшее количество паромов получится, если на одном острове будет 10 городов, а на каждом из остальных 10 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 145.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Ответ: $AE : AF = 1 : 1$.

Решение. (Рис. 6.) Рассмотрим равнобедренные треугольники O_1AN и O_2AM. Их углы при вершине A равны как вертикальные. Отсюда легко следует равенство всех остальных углов этих треугольников, в частности, равны углы при центрах O_1 и O_2. Так как угол MEA — внешний для треугольника EAN, то

$$\angle MEA = \angle EAN + \angle ENA.$$

Угол EAN измеряется половиной дуги NE, а угол ENA — половиной дуги EA, поэтому угол MEA равен половине центрального угла при вершине O_1. Угол MFA измеряется половиной дуги AM, и значит, равен половине центрального угла при вершине O_2. Следовательно, $\angle MEA = \angle MFA$, то есть треугольник AEF — равнобедренный, и значит, $AE = AF$.

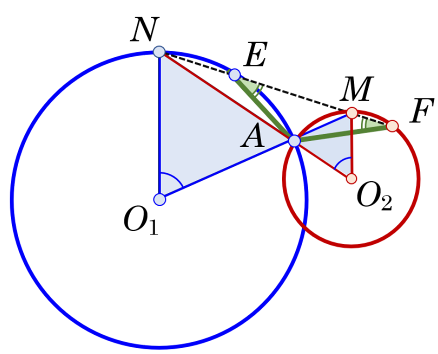

Рис. 6

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что угол MEA равен равен половине центрального угла с вершиной O_1 — 3 балла. Доказано, что угол MFA равен половине центрального угла с вершиной O_2 — 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geqslant 1.$$

Решение. Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и гармоническом для положительных чисел
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{x+y+z},$$
которое после приведения к общему знаменателю равносильно очевидному
$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^2 \geqslant 0.$$
Взяв в качестве x, y и z соответственно величины $2+ab$, $2+bc$ и $2+ca$, получим:
$$\frac{1}{2+ab}+\frac{1}{2+bc}+\frac{1}{2+ca} \geqslant \frac{9}{6+ab+bc+ca}.$$
Знаменатель дроби можно увеличить, заменив выражение $ab+bc+ca$ на бóльшее $a^2+b^2+c^2$, так как $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca \iff (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$. Поэтому
$$\frac{9}{6+ab+bc+ca} \geqslant \frac{9}{6+a^2+b^2+c^2}.$$
Учитывая условие $a^2+b^2+c^2=3$, приходим к требуемому.

Критерии. Применение неравенства о среднем гармоническом (возможно, без доказательства) — 3 балла. Использовано неравенство $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.