Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2023/24 учебного года по математике

Тула 2023

Список использованной литературы

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников».

Книги и методические пособия:

1. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.

2. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

3. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

4. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

5. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

6. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

7. Адельшин А. В., Кукина Е. Г., Латыпов И. А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М.: МЦНМО, 2011.

8. Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95 (2-е издание, исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

9. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

10. Блинков А. Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006-2013. – М.: МЦНМО, 2014.

11. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. – М.: МЦНМО, 2014.

12. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

13. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е издание, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2013.

14. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

15. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

16. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

17. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

18. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

19. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

20. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Методические рекомендации для жюри муниципального этапа олимпиады по оцениванию работ участников

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	***Правильность (ошибочность) решения***
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

10.1. Иван сыграл в следующую игру. Он взял 7 листов бумаги и разрезал некоторые из них на 7 частей каждый. Затем он смешал все куски вместе, взял некоторые из них и снова разрезал на 7 частей, и так далее. Закончив эту игру, он подсчитал количество всех кусочков бумаги (разного размера). Могло ли у него получиться 1000 кусков?

Ответ: нет.

Решение. Пусть на некотором шаге у Ивана было n кусков бумаги. После разрезания k кусков на 7 частей каждый у него станет $n - k + 7k = n + 6k$ кусков. Заметим, что при выполнении этого действия чётность числа кусков не изменилась, и, так как изначально у Ивана было 7 листов, то на каждом шаге он будет иметь нечётное число кусков бумаги. Таким образом, он не сможет получить 1000 кусков.

10.2. Чему равно наименьшее значение, которое может принимать выражение $\sqrt{3x - 2y - 1} + \sqrt{2x + y + 2} + \sqrt{3y - x}$?

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим выражение под первым корнем через a, выражение под третьим корнем – через b. Тогда выражение под вторым корнем оказывается равным $a + b + 3$. Поскольку a и b неотрицательны, то наименьшее значение исходного выражения достигается при $x = \frac{3}{7}, y = \frac{1}{7}$. В этом случае $a = b = 0,$ а значение выражения равно $\sqrt{3}$.

Комментарий. Только верный ответ без доказательства минимальности – 1 балл.

10.3. В первом сплаве содержится 30% меди и 60% цинка во втором сплаве – 40% вещества меди и 40% цинка, в третьем сплаве – 80% меди и 20% цинка. Из этих трех сплавов получили новый сплав, содержащий 70% меди. Чему равно наибольшее возможное содержание вещества цинка в новом сплаве?

Ответ: 28%.

Решение. Пусть x, y, z – доли первого, второго и третьего сплавов в последнем сплаве соответственно. Эти величины связаны соотношениями: $0 \leq\ x, y, z \leq\ 1, x + y + z\ = 1.$ Откуда $z = 1 - x - y$. Тогда $0 \leq 1 - x - y \leq 1$, или $0 \leq\ x + y\ \leq 1$.

При этом доля меди в новом сплаве:

$$a = 0{,}3\,x + 0{,}4y + 0{,}8(1 - x - y) = 0{,}8 - 0{,}5x - 0{,}4y$$

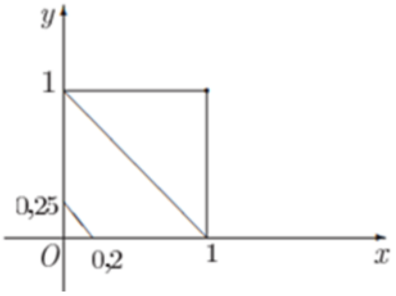
а цинка –

$$b =\ 0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}2z = 0{,}6x + 0{,}4y + 0{,}2(1 - x - y) = 0{,}2 + 0{,}4x + 0{,}2y.$$

Поскольку содержание меди известно и равно 70%, то
$a =\ 0{,}8 - 0{,}5x - 0{,}4y = 0{,}7,$ откуда $0{,}5x + 0{,}4y = 0{,}1$ или $5x + 4y = 1$.
Таким образом, любая пара чисел (x, y), удовлетворяющих соотношениям:

$$0 \leq\ x \leq 1, 0 \leq y \leq\ 1, 0 \leq x + y \leq 1,$$

соответствует сплаву, в котором доли первого, второго и третьего сплавов равны соответственно $x, y, z = 1 - x - y$. Точки, удовлетворяющие этим условиям, находятся внутри единичного квадрата с вершинами (0;0), (1;0), (1;1), (0;1) под прямой, задаваемой уравнением $x + y = 1$. А чтобы сплав содержал 70% меди они должны к тому же лежать на прямой $5x + 4y = 1$.



Тогда доля цинка в новом растворе
$b =\ 0{,}2 + 0{,}4x + 0{,}2y = 0{,}2 + 0{,}4x + 0{,}2 \cdot \frac{1-5x}{4} = -0{,}15x + 0{,}25, x\epsilon\ [0; 0{,}2]$.

Поскольку $b = b(x)$ – убывающая функция, то максимальное значение она принимает при $x\ =\ 0{,}2$ и $b_{max} = 0{,}15 \cdot 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}28$, т.е. 28%.

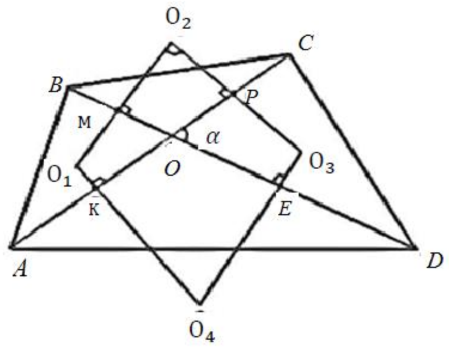
10.4. Сколько пар простых чисел a *и* b, являющихся корнями уравнения $a+b=(a-b)^3$ существует? Найдите их.

Ответ: одна пара $a=5;\ b=3$.

Решение. Пусть $a-b=n$, тогда $a+b=n^3,\ (n\in Z)$. Вычитая из второго равенства первое, получим: $b=\frac{n^3-n}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$. Среди трех последовательных натуральных чисел $(n-1);n;(n+1)$ обязательно есть число, делящееся на 3, значит b, должно делиться на 3. Единственное простое число, делящееся на 3 – это 3. Таким образом, $b=3$ (при $n=2$). Найдем a из первого уравнения: $a-3=2\ =>a=5$.

10.5. Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *O*. Точки O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры окружностей описанных около треугольников *AOB, BOC, COD*. Докажите, что площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ не меньше половины площади четырехугольника *ABCD.*

Решение. Пусть *M, P, E* и *K* – середины отрезков *OB*, *OC*, *OD* и *OA* соответственно. Поскольку центры описанных окружностей лежат на пересечениях серединных перпендикуляров, то $O_1O_2 \parallel O_3O_4$, т.к. перпендикулярны *BD*. Аналогично $O_2O_3 \parallel O_1O_4$. Поэтому $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм. И острый угол α этого параллелограмма равен острому углу между диагоналями *AC* и *BD* (т.к. стороны этих углов взаимно перпендикулярны). Площадь параллелограмма $O_1O_2O_3O_4=O_1O_2\ \cdot O_3O_4\cdot\ \sin\alpha$.



Площадь четырехугольника $ABCD=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$. Но $\mathrm{O_1O_2}\geq\ \mathrm{KP}\ =\frac{1}{2}\ \mathrm{AC}, \mathrm{O_3O_4}\geq \mathrm{ME}=\frac{1}{2}BD$. Следовательно, $S_{\mathrm{O_1O_2O_3O_4}}\geq\frac{1}{2}S_{ABCD}$.