10 класс

1. Решите уравнение в целых числах $x^2 + x + 1 = y^2$.

   Ответ: $(-1;-1)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(0;-1)$.

   Решение. Перепишем уравнение в виде $y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Оно равносильно равенству $(2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 3$. Так как x и y — целые, то и сомножители в левой части равенства целые и будут являться делителями числа 3, т. е. принимают значения $-3, -1, 1, 3$. Таким образом, получаем совокупность из четырёх систем:

$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 1 \\ 2y + 2x + 1 = 3, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 3 \\ 2y + 2x + 1 = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = -3 \\ 2y + 2x + 1 = -1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2y - 2x - 1 = -1 \\ 2y + 2x + 1 = -3. \end{cases}$$

   Решая их, находим четыре пары решений.

   Критерии оценки.

   1) Для получения полного балла (7 баллов за задачу) необходимо найти четыре решения. Если потеряно хотя бы одно решение, за задачу ставится не более трёх баллов.

2. Найдите значения a и b, при которых выражение $a^3 + b^3 + ab$ принимает наименьшее значение, если известно, что $a + b = 1$.

   Ответ: $a = b = \frac{1}{2}$.

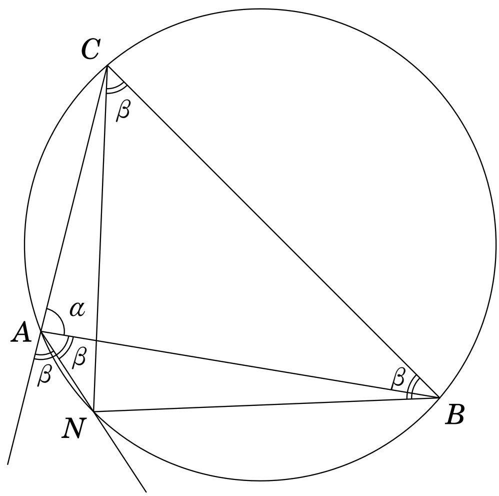
Решение.

$$a^3 + b^3 + ab = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab = a^2 + b^2 =$$
$$= a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1 =$$
$$= 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Критерии оценки.

1) Если верно найдена обоснованная оценка выражения, но не указано, при каких a и b она достигается, снимается 2 балла.
2) Оценка без обоснования — 0 баллов.

3. Окружность, описанная около треугольника ABC, пересекает биссектрису внешнего угла треугольника при вершине A в точке N, лежащей на дуге AB (N отлична от A). Докажите, что $NB = NC$.



Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAN = \beta$. Сумма смежных углов равна π, поэтому $\alpha + 2\beta = \pi$. $\angle BNC = \angle BAC = \alpha$, $\angle BCN = \angle BAN$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). $\angle CBN = \pi - \angle CAN = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - (\pi - \beta) = \beta$. Таким образом, $\angle CBN = \angle BAN$. Значит, треугольник BCN равнобедренный, и $NB = NC$.

Критерии оценки.

1) Верное решение — 7 баллов.

4. У Винни Пуха и Пятачка было по коробке конфет, в которых одинаковое число конфет, и они ждали в гости друзей. Пятачок разложил конфеты из своей коробки на 8 блюдец поровну, а остаток — меньше 8 — положил себе в карман. Винни Пух разложил часть конфет из своей коробки на другие 9 блюдец поровну, а остальные (их было больше 9) — положил себе в карман. После того, как Винни Пух положил себе в карман ещё и все конфеты с одного блюдца Пятачка, у него в кармане стало 60 конфет. Сколько конфет в кармане Пятачка?

   Ответ: 6 конфет.

   Решение. Пусть n — количество конфет в одной коробке, t — количество конфет, которое положил Пятачок на каждое из своих 8 блюдец, q — количество конфет, которое положил Винни Пух на каждое из своих 9 блюдец Вини Пух, а R_1 и R_2 — это количество конфет, которые положил в свой карман Пятачок и Винни Пух соответственно. Тогда по условию

$$n = 8t + R_1 = 9q + R_2, \tag{1}$$

$$t + R_2 = 480. \tag{2}$$

Выражаем t из (2) и получаем, что $480 + R_1 = 9(q + R_2)$. Проверяем, что R_1 может равняться только 6.

Критерии оценки.

1) Обоснованно получен верный ответ — 7 баллов.

2) Правильно составлена система, но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки — 4 балла.

5. Разрешаются следующие преобразования четвёрок (a, b, c, d) целых чисел:

(1) (b, a, c, d); (2) (a, b, d, c);

(3) $(a + d, b, c + b, d)$; (4) $(a, b - c, c, d - a)$.

Можно ли с помощью некоторого числа указанных преобразований перейти от четвёрки $(20, 20, 23, 23)$ к четвёрке $(2020, 2020, 2023, 2023)$?

Ответ: нельзя.

Решение. Инвариант, т. е. величина, которая не изменяется при всех таких преобразованиях четвёрки чисел (a, b, c, d), есть число равное $ab - cd$, поэтому, если до преобразований он был равен (-129), то и в конце должен оставаться таким же. Однако, у второй четвёрки он равен (-12129). Значит, желаемого достичь не удастся.

Критерии оценки.

1) Оценка без обоснования – 0 баллов. Если найден инвариант, но решение не доведено до конца, решение оценивается не более чем в три балла.