ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап.

Ответы и решения

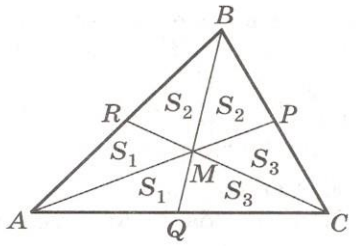
10 класс

10.1. Ответ: $\frac{1}{3}$

Решение. Из данного равенства следует, что $a^4 - b^2a^2 - 2b^4 = 0$, т.е. $(a^2 + b^2)(a^2 - 2b^2) = 0$, откуда $a^2 = -b^2$ или $a^2 = 2b^2$. Первый случай невозможен: условию $a^2 = -b^2$ удовлетворяют только числа $a = b = 0$, при котором данное равенство не имеет смысла. Ненулевые числа a и b, такие, что $a^2 = 2b^2$, равенству удовлетворяют, и при всех таких a и b значение выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ равно $\frac{1}{3}$.

10.2. Решение. Найдем значение многочлена в точке $x = 1$: $f(x) = A + B + C + D + E + F = 21 - 16 + 13 - 47 + 46 - 17 = 0$. Это означает, что $x = 1$ является корнем любого из таких многочленов, а значит, все такие многочлены имеют общий корень.

10.3.Решение. Обозначим данные в условии площади через S_1, S_2 и S_3.



Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AR}{RB}$, так как у треугольников *ARM* и *BRM* общая высота. Аналогично $\frac{2S_1+S_3}{2S_2+S_3} = \frac{AR}{RB}$, т.е. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2S_1+S_3}{2S_2+S_3}$, откуда $S_1(2S_2 + S_3) = S_2(2S_1 + S_3), S_3(S_1 - S_2) = 0, S_1 = S_2$, так как $S_3 > 0$. Отсюда *AR* = *RB*, т.е. *CR* – медиана треугольника *ABC*. Аналогично медианами являются *AP* и *BQ*.

10.4. Решение. Обозначим данные положительные числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2023}$. По условию для всех $i = 2, 3, 4, \dots, 2022$ $a_i = \sqrt{a_{i-1} \cdot a_{i+1}}, a_1 = \sqrt{a_{2023} \cdot a_2}, a_{2023} = \sqrt{a_{2022} \cdot a_1}$. Из данных равенств следует, что $\frac{a_1}{a_{2023}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{2023}}{a_{2022}}$ (*). Пусть это отношение равно q. Оно положительно. Пусть $q < 1$, тогда из условия (*) получаем, что $a_{2023} > a_1 > a_2 > \dots > a_{2022} > a_{2023}$. А такого быть не может. Аналогично при $q > 1$ также получаем противоречие. Значит, остается $q = 1$ и тогда условие (*) запишем как $a_1 = a_2 = \dots = a_{2022} = a_{2023}$.

10.5. Ответ: 1530

Решение. Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую – одной из двух оставшихся, третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски, и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую – двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого 1536 – 6 = 1530 способов.