КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023/24 учебный год

11 класс

11.1. (*7 баллов*)

Можно ли представить число 2023 в виде суммы трехзначного числа и куба суммы цифр этого числа?

Ответ: нет.

Решение: пусть $2023 = \overline{xyz} + (x + y + z)^3$.

Так как $100 \leq \overline{xyz} < 1000$, то $1023 < (x + y + z)^3 < 1923$. Тогда $x + y + z$ может быть равно 11 или 12. Следовательно, $\overline{xyz}$ равно:

$$\overline{xyz} = 2023 - 11^3 = 692, 6 + 9 + 2 \neq 11 \text{ или}$$
$$\overline{xyz} = 2023 - 12^3 = 295, 2 + 9 + 5 \neq 11.$$

11.2. (*7 баллов*)

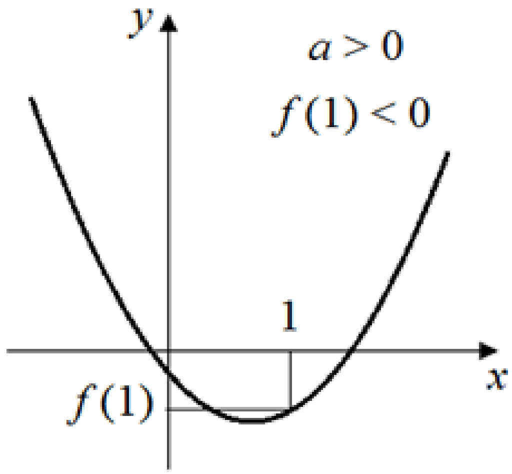
Докажите, что если $a(a + b + c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня.

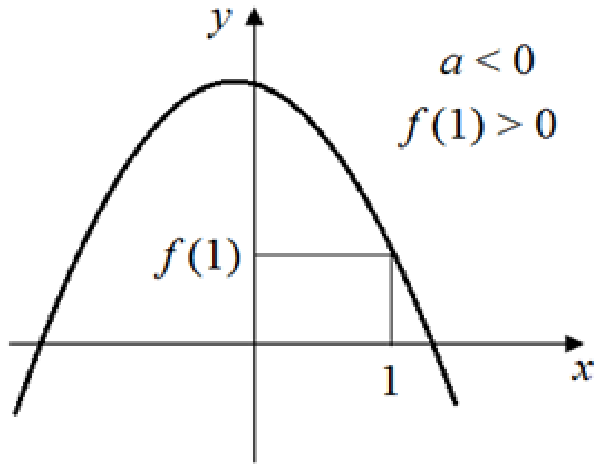
Решение: рассмотрим функцию $y = ax^2 + bx + c$, графиком которой является парабола.

Заметим, что $y(1) = a + b + c$.

1) Пусть $a > 0$, тогда по условию $y(1) < 0$. Очевидно, что парабола пересечет ось Оx в двух точках. Следовательно, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ будет иметь два действительных корня.

2) Пусть $a < 0$, тогда по условию $y(1) > 0$. Очевидно, что парабола пересечет ось Оx в двух точках. Следовательно, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ будет иметь два действительных корня.





11.3. (*7 баллов*)

На 115 карточках написаны целые числа 1, 2, 3, 4,…, 115. Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на двух соседних карточках равна либо n, либо m. Оказалось, что для данных n и m существует только один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано 19?

Ответ: 97.

Решение: пусть на соседних карточках стопки сверху вниз написаны числа $a_1, a_2, \ldots a_{115}$. Составим стопку $116 - a_{115}, 116 - a_{114}, \ldots, 116 - a_1$.

Составленная стопка удовлетворяет условию задачи, так как разность между числами на соседних карточках также равна n или m:

$$116 - a_k - (116 - a_{k-1}) = a_{k-1} - a_k.$$

По условию задачи стопку можно сложить единственным образом, поэтому вторая стопка получается из первой переворотом, т.е. $a_{115} = 116 - a_1 = 116 - 19 = 97$.

11.4. (*7 баллов*)

В школьном шахматном блицтурнире каждый участник встречался с каждым по одному разу. Встречи каждого тура проходили одновременно. Опасаясь, что инвентаря не хватит, ровно половина участников принесла его из дома: большая часть из них принесла шахматы, а остальные принесли шахматные часы. В итоге, в каждом туре использовались одни принесенные часы и один из принесенных комплектов шахмат. По окончании турнира выяснилось, что каждый принесенный комплект шахмат использовался одинаковое количество раз и каждые принесенные часы также использовались одинаковое количество раз. Найдите количество участников турнира.

Ответ: 16.

Решение: пусть n – искомое количество участников, тогда, так как ровно половина участников принесла инвентарь из дома, то $n = 2k$, при этом количество сыгранных туров равно $2k - 1$. Предположим, что было принесено p комплектов шахмат и m часов, где $m < p$. Так как каждый из этих комплектов шахмат и каждые часы использовались одинаковое количество раз, то числа p и m являются делителями числа $2k - 1$.

По условию, $k = p + m$, то есть $2k - 1 = 2p + 2m - 1$. Так как $2k - 1$ делится на p, то и $2m - 1$ делится на p. Тогда, учитывая, что $m < p$, получим, что $2m - 1 = p$. Поскольку $2k - 1$ делится на m, то и $2k - 1 = 4m - 3$ делится на m. Следовательно, m является делителем числа 3, то есть $m = 1$ или $m = 3$.

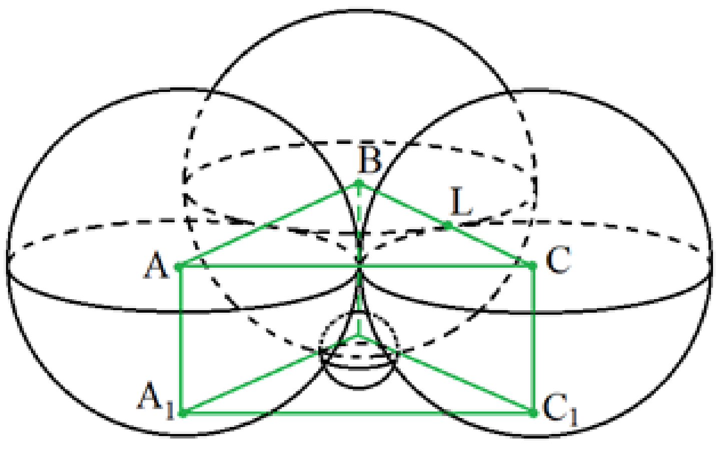
Первый случай невозможен, так как при $m = 1$ $p = 2m - 1 = 1$ (противоречит тому, что $m < p$). Во втором случае: $m = 3, p = 5$, то есть $n = (5 + 3) \cdot 2 = 16$.

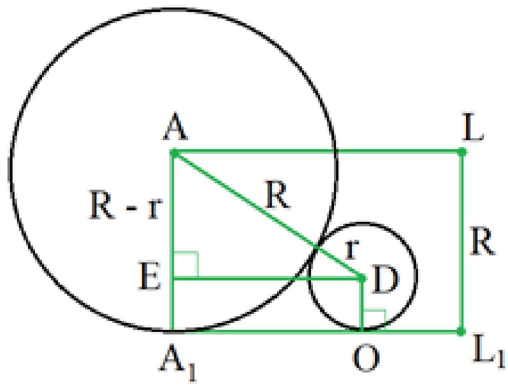
11.5. (*7 баллов*)

Три шара радиуса R касаются одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найдите радиус четвёртого шара, касающегося трёх данных и той же плоскости.

Ответ: $\frac{R}{3}$.

Решение.





Центры шаров A, B, C и точки касания A_1, B_1, C_1 являются вершинами прямой призмы с высотой $AA_1 = R$, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной $2R$. Центр D малого шара проектируется в центр треугольника $A_1B_1C_1$ – точку пересечения медиан (высот). Пусть L и L_1 –

середины сторон BC и B_1C_1 соответственно. Рассмотрим сечение шаров плоскостью AA_1L_1L:

$$ED^2 = AD^2 - AE^2, ED = A_1O = \frac{2}{3}A_1L_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2, \frac{4R^2}{3} = 4Rr, r = \frac{R}{3}.$$