ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

11 класс

1. У математика есть банковская карта с четырехзначным пин-кодом, состоящим из ненулевых цифр. Известно, что если пин-код карты умножить на 6 и поделить на 5, то получится число из тех же цифр, но в обратном порядке. Найдите все возможные значения такого пин-кода.

   Решение. Обозначим x=$\overline{abcd}$ пин-код (a, b , c, d – цифры). По условию $a \neq 0$ и $d \neq 0$ и $6\overline{abcd} = 5\overline{dcba}$. Правая часть делится на 5, поэтому $d = 5$. Очевидно цифра a – чётная и меньше цифры d. С другой стороны, $a + 1 \geq {}^5/_6\, d > 4$, следовательно, $a = 4$. Имеем $6(4000 + 100b + 10c + 5) = 5(5000 + 100c + 10b + 4)$. Отсюда $550b - 440c = 990$, $5b - 4c = 9$, или $5(b - 1) = 4(c + 1)$. Следовательно, $b = 5$, $c = 4$ или $b = 9$, $c = 9$.

   Ответ. x=4545 или 4995.

   Рекомендации к оцениванию.

   Если пин-код выписан без всякого обоснования – 0 баллов.

   Если пин-код выписан и проверен, что удовлетворяет условиям задачи – 1 балл за каждый пин-код.

   Если обоснованно найден только один из пин-кодов - 4 балла.

2. Приведите пример такого многочлена третьей степени с целыми коэффициентами, для которого иррациональное число $a = \sqrt[3]{2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024}} + \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2022 \cdot 2024}}$ является корнем.

   Решение. Заметим, что 2022·2024=(2023-1) · (2023+1)=2023^2-1, тогда число $a = \sqrt[3]{2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024}} + \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2022 \cdot 2024}}$ можно представить в виде: $a = b + \frac{1}{b}$, где $b = \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2023^2 - 1}}$. Теперь воспользуемся тождеством $(b + \frac{1}{b})^3 = b^3 + \frac{1}{b^3} + 3\left(b + \frac{1}{b}\right)$, при этом $b^3 + \frac{1}{b^3} = 2 \cdot 2023$. Следовательно, $a^3 = (b + \frac{1}{b})^3 = 2 \cdot 2023 + 3a$ или $a^3 - 3a - 4046 = 0$.

   Ответ. $P(x) = x^3 - 3x - 4046$.

   Рекомендации к оцениванию.

   Если замечено, что а $= b + \frac{1}{b}$, где $b = \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2023^2 - 1}}$ - 2 балла;

Получено тождество $(b+\frac{1}{b})^3 = b^3+\frac{1}{b^3}+3\left(b+\frac{1}{b}\right)$ - 4 балла.

3. Пусть квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют неравенству $g'(x)h'(x) \geq |g(x)| + |h(x)|$ при всех действительных x. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ на всей числовой оси.

   Решение. Пусть x_1, x_2 – абсциссы вершин парабол $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Тогда $g(x) = a(x - x_1)^2 + b$, $h(x) = c(x - x_2)^2 + d$ (a, $c \neq 0$, b, d – ординаты вершин парабол), и исходное неравенство переписывается в виде $4ac(x - x_1)(x - x_2) \geq |a(x - x_1)^2 + b| + |c(x - x_2)^2 + d|$. Подставляя в это неравенство $x = x_1$, получаем $|b| + |c(x - x_1)^2 + d| \leq 0$, откуда $b = 0$ и $c(x_1 - x_2)^2 + d = 0$. По аналогичным соображениям $d = 0$, поэтому из предыдущего равенства следует, что $x_1 = x_2$. Так как $4ac(x - x_1)^2 \geq 0$ при всех x, то $ac > 0$. Поэтому $f(x)=g(x)h(x)=ac(x-x_1)^4$ и наименьшее значение $f(x)$ равно 0.

   Ответ. 0.

   Рекомендации к оцениванию

   Получено неравенство вида $4ac(x - x_1)(x - x_2) \geq |a(x - x_1)^2 + b| + |c\left(x - x_2\right)^2 + d|$ - 1 балл. Получено, что $b = d = 0$ – 2 балла. Доказано, что $ac > 0$ – 2 балла. Получено представление $f(x)=g(x)h(x)=ac(x-x_1)^4$- 5 баллов.

4. В гостинице из 2023 одноместных комнат действуют правила: 1) каждый номер сдается ровно на сутки; 2) внутри каждой комнаты висит табличка с номером другой комнаты, в которую можно переехать из текущей.

   В понедельник в 12.00 в гостиницу заселились 2023 жителя и, соблюдая правила проживания, провели там m дней (m>1). Оказалось, что последние сутки пребывания в отеле они провели в тех же номерах, в которые заселились изначально; при этом каждый гость успел пожить в m-1 разных комнатах. За какое наименьшее количество дней это могло произойти?

   Решение. Схему переселения гостей отеля удобно представить с помощью ориентированного графа с вершинами $R_1, R_2, \ldots, R_{2023}$. Поскольку все комнаты в отеле одноместные и из каждой комнаты можно переселяться в другую строго по указанному номеру, то в каждую вершину графа входит ровно одна дуга и выходит одна дуга. Пусть m – количество суток, проведенных гостями в отеле. Согласно условию задачи каждый гость побывает ровно в $m-1$ разных комнатах, чему будет соответствовать маршрут в графе по циклу из $m-1$ вершины. Поскольку каждая вершина графа имеет ровно один вход и один выход, получим, что граф состоит из непересекающихся циклов по $m-1$ вершине каждый. Теперь учитывая, что $2023 = 7 \cdot 17^2$ получим, что наименьший цикл состоит из 7 вершин. Таким образом, $m = 8$.

Ответ: 8 суток.

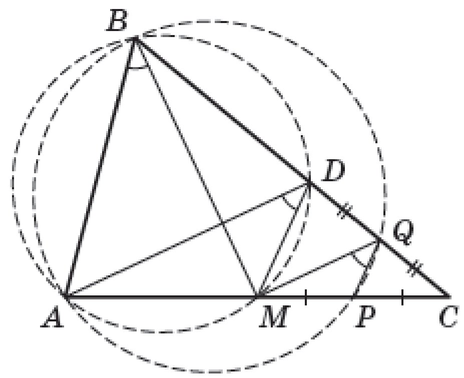
Рекомендации к оцениванию

Верный ответ без какого-либо обоснования – 0 баллов. Множество комнат разбито на непересекающиеся подмножества (или циклы в графе) – 2 балла.

Доказано, что эти подмножества имеют одинаковое количество элементов – 3 балла.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC пересекает его стороны BC и AC во внутренних точках Q и P соответственно, причем $AP = 3PC$. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$, где BM – медиана треугольника ABC.

Решение. Проведем через точку M прямую, параллельную PQ, до пересечения со стороной BC в точке D. Отрезок PQ является средней линией треугольника MDC и делит сторону DC пополам. Следовательно, отрезок MQ – средняя линия треугольника ADC, а значит, параллелен AD. Поэтому $\angle ADM = \angle MQP$ (как углы с параллельными сторонами).



Осталось заметить, что $\angle BAM = 180° - \angle BQP = 180° - \angle BDM$, откуда получаем, что четырёхугольник $ABDM$ - вписанный, и, как следствие, углы ABM и ADM равны.

Рекомендации к оцениванию:

Проведено дополнительное построение (точка D) – 2 балла;

Доказана параллельность AD и MQ – 2 балла;

Доказано, что ABDM вписанный – 2 балла.

6. Дана сфера единичного радиуса и точка S на ней. Рассматриваются всевозможные тетраэдры с вершиной S, имеющие попарно перпендикулярные ребра, исходящие из этой вершины. Докажите, что плоскости оснований всех таких пирамид имеют непустое пересечение. Найдите множество, являющееся этим пересечением.

Решение. Пусть SABC – одна из таких пирамид. Построим точки S^1, A^1, B^1 и C^1, симметричные относительно центра сферы O точкам S, A, B и C соответственно.

Тогда $SABCS^1A^1B^1C^1$ – прямоугольный параллелепипед, вписанный в сферу радиуса 1. Множество всех построенных таким образом параллелепипедов имеет общие вершины S и S^1, образующие диагонали всех параллелепипедов. Заметим, что все плоскости ABC будут пересекать этот отрезок SS^1. Докажем, что все эти плоскости проходят через одну точку на отрезке SS^1. Рассмотрим сечение SCS^1C^1 , тогда AB пересекает сторону SC^1 в точке M так, что $SM=MC^1$. Обозначим точку пересечения CM и SS^1 через P. Тогда из подобия треугольников CPS^1 и SPM находим PS=2/3. Поскольку это верно для всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу радиуса 1, то P и есть искомая точка. Докажем, что она единственна.

Предположим, что существует вторая точка P*, отличная от P, принадлежащая всем плоскостям ABC. Очевидно, что точка P* не может лежать на прямой SS^1. Тогда точка P**, симметричная точке P* относительно прямой SS^1, тоже должна принадлежать всем этим плоскостям. Следовательно, все плоскости ABC должны проходить через точку P перпендикулярно прямой SS^1. Получили очевидное противоречие.

Рекомендации к оцениванию.

1. Построен параллелепипед $SABCS^1A^1B^1C^1$ –2 балла;
2. Задача верно сведена к плоской и найдена точка P, но ее единственность не доказана – 5 баллов;

3. При использовании координатного метода выбрана система координат, привязанная к SABC – 1 балл;
4. Доказано, что искомое множество может состоять из единственной точки (единственность), сама точка не найдена – 2 балла;
5. При правильном использовании координатного или другого аналитического метода получен неверный ответ только из-за арифметических ошибок – 4 балла.