Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2023 г.)

11 класс

1. Решите уравнение

$$(\sin x - (\sin x + \cos x)^{1/2})^{1/2} = \cos x\ .$$

Решение. Заметим, что $\cos x > 0$ и $\sin x > (\sin x + \cos x)^{1/2}$.
Учитывая, что $\sin x < (\sin x)^{1/2}$, получим $\sin x < (\sin x + \cos x)^{1/2}$. Учитывая оба неравенства, получим, $\sin x = (\sin x + \cos x)^{1/2}$, откуда $\cos x = 0$ и $\sin x = 1$, следовательно, $x = \pi/2+2\pi n$, $n \in Z$.
Ответ: $x = \pi/2 +2\pi n$, $n \in Z$.

2. На доске записаны числа 5 и 7. За один ход Павел может записать на доску сумму или разность чисел, написанных на доске, и стереть с доски одно из чисел. Сможет ли Павел за несколько ходов получить числа 2022 и 3?
Решение. Известно, что для произвольных целых чисел x и y
НОД (x, y) = НОД $(x, x + y)$ = НОД $(x, x - y)$.
Поэтому после каждого хода Павла на доске будут оставаться взаимно простые числа. Поскольку НОД(2022, 3) = 3 ≠ 1, то получить числа 2022 и 3 Павел не сможет.
Ответ: Не может.

3. Числа a и b такие, что $a > b > 0$.

Можно ли утверждать, что $\sqrt{a+\sqrt[4]{b}} > \sqrt{b+\sqrt[4]{a}}$ **?**

Решение. После возведения в квадрат получим равносильное неравенство:
$a-b > \sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b} \Leftrightarrow \quad (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) > \sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}$. Поскольку $a > b$, то данное неравенство равносильно следующему: $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) > 1$. Для малых a, b (например, при $a=10^{-4}$, $b=10^{-8}$) последнее неравенство, очевидно, неверно.
Ответ: Нельзя.

4. Дана функция $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. **Найдите область определения функции $f(f(x))$.**

Решение. Обозначим $u=\sqrt{x^2-2x}$. Имеем:

$x^2-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0$ или $x\ge 2$. Для функции $f(f(x))=f(u)$ область определения должна удовлетворять совокупности неравенств $u\le 0$ или $u\ge 2$, т.е. $\sqrt{x^2-2x}\le 0$ или $\sqrt{x^2-2x}\ge 2$. Первое из этих неравенств может выполняться лишь в случае нулевого подкоренного выражения, т.е. при $x = 0$ или $x = 2$. Решим второе неравенство: $\sqrt{x^2-2x}\ge 2 \Leftrightarrow x^2-2x\ge 4 \Leftrightarrow x\le 1-\sqrt{5}$, или $x\ge 1+\sqrt{5}$.

Ответ: $x\in(-\infty,-\sqrt{5}+1]\cup\{0\}\cup\{2\}\cup[1+\sqrt{5},+\infty)$.

5. В клетки таблицы 15х15 вписаны целые числа. Известно, что сумма чисел в любом квадрате 2х2 нечетна. Какое наименьшее и какое наибольшее количество нечетных чисел может содержаться во всей таблице?

*Решение***.** Выделим в данной таблице подтаблицу 14х14, стоящую в верхнем левом углу таблицы (см. рисунок). Разобьем ее на 49 квадратиков 2х2. В каждом таком квадратике есть по скрайней мере одно нечетное число (иначе сумма будет четной). Поэтому во всей таблице не менее 49 нечетных чисел. Тем самым количество нечетных чисел во всей таблице не больше $15^2 = 225 - 49 = 176$. Осталось убедиться, что указанные значения 49 и 176 достигаются. Для этого подтаблицу 14х14, стоящую в левом вехнем углу исходной таблицы разобьем на 49 квадратиков 2х2 и в каждом квадратике отметим правую нижнюю клетку. Еслим мы поставим в каждую отмеченную клетку нечетное число (всего их 49), а в остальные клетки – четные числа, то получим таблицу удовлетворяющую условию. Если же мы в отмеченные клетки поставим четные числа, а в остальные клетки – 176 нечетных, то мы также получим таблицу, удовлетворяющую условию задачи.

Ответ: 49 и 176