МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Республика Бурятия

2023–2024 учебный год

РЕШЕНИЯ
И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Улан-Удэ

2023

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ И ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОЦЕНИВАНИЮ РАБОТ

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года в Республике Бурятия проводится по заданиям, подготовленным Региональной предметно-методической комиссией в единый для всех муниципалитетов день — **11 декабря 2023 г.** Муниципальный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 7, 8, 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 5 задач. Продолжительность олимпиады составляет **3 часа 55 минут**. Единое время начала олимпиады для всех муниципалитетов — **10:00** по местному времени.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 35.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

В случае отсутствия *специальных критериев* по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Решение верное, но имеются небольшие недочёты.
5–6	В целом верное решение, которое содержит ошибки, пропущенные важные случаи, не влияющие на логику решения.
3–4	Решение делится на две равноценные части, участником решена одна из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Важно отметить, что жюри НЕ снимает баллы за:

1) объём текста (важно также понимать, что сколь угодно длинный текст без содержательных продвижений никак НЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ);

2) почерк или способ оформления;

3) отличие решения участника от авторского.

Черновики работ не проверяются.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Региональная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников муниципалитетов.

11 КЛАСС

11.1. Что больше, $\sin 1 \sin 2$ или $\sin 7 + \sin 8$?

И. Двойнишников, Д. Минеев

Решение. Покажем, что

$$\sin 1 \sin 2 < 1 < \sin 7 + \sin 8.$$

С одной стороны ясно, что $\sin 1 \sin 2 < 1$. Поскольку $3.14 < \pi < 3.2$, то верны следующие неравенства

$$13\pi < 13 \cdot 3.2 = 41.6 < 42 \Rightarrow \frac{13\pi}{6} < 7,$$

$$5\pi > 5 \cdot 3.14 > 15 > 14 \Rightarrow 7 < \frac{5\pi}{2}.$$

Заключаем, что

$$\frac{13\pi}{6} < 7 < \frac{5\pi}{2}.$$

На интервале

$$\left(\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\right)$$

функция $\sin x$ возрастает. При этом $\sin(13\pi/6) = 1/2$, откуда $\sin 7 > 1/2$. Аналогично можно показать, что

$$\frac{5\pi}{2} < 8 < 3\pi,$$

откуда $\sin 8 > 1/2$. Тем самым

$$\sin 7 + \sin 8 > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если в работе без объяснений используется, что $\sin 1 \sin 2 \leq 1$, то *баллы НЕ снижаются.*

Оценки на число π предполагаются известными. Участки возрастания и убывания функции $\sin x$ предполагаются известными.

Только ответ — *0 баллов.*

11.2. На Новый Год магазин подарков украсил витрину гирляндой из $2n+1$ лампочки. Все лампочки имеют попарно различные цвета, а первая и последняя лампочка не соединены напрямую. В новогоднюю ночь произошёл сбой: каждая лампочка поменяла свой цвет на цвет одной из своих соседок. Докажите, что теперь найдутся две лампочки одного цвета.

И. Двойнишников

Решение 1. Пусть после сбоя не нашлось двух лампочек одного цвета. Обозначим последовательно лампочки в гирлянде

$$l_1,\ l_2, \ldots, l_{2n+1},$$

а их цвета соответственно

$$c_1,\ c_2, \ldots, c_{2n+1}.$$

У лампочки l_1 соседкой является только лампочка l_2, значит, после сбоя у лампочки l_1 будет цвет c_2. У лампочки l_3 соседками являются l_2, l_4, значит, после сбоя у неё или цвет c_2, или c_4. Но цвет c_2 уже занят l_1, а лампочек с одинаковыми цветами у нас нет. Значит, у лампочки l_3 цвет c_4. Проделав аналогичные рассуждения для лампочек с номерами $5, 7, \ldots, 2n-1$, получаем, что после сбоя каждая из них поменяет цвет на цвет её следующей по номеру соседки. Для лампочки l_{2n+1} соседкой является только l_{2n}, значит, после сбоя лампочка l_{2n+1} получит цвет c_{2n}. В таком случае у лампочек l_{2n-1}, l_{2n+1} после сбоя один и тот же цвет, что является противоречием.

Решение 2. Занумеруем лампочки по порядку слева направо и их цветам присвоим те же номера. Заметим, что после сбоя каждая лампочка с нечётным номером поменяет свой цвет на цвет с чётным номером. Изначально цветов с чётным номером было всего n, а лампочек с нечётными номерами — $n+1$. Но это значит, что среди лампочек с нечётными номерами после сбоя найдутся хотя бы две лампочки одного цвета.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если задача решена верно для какого-то фиксированного нечетного значения лампочек — *не более 3 баллов.*

Задача решена в предположении того, что лампочки изменили цвета каким-то определенным образом — *0 баллов.*

11.3. Барон Мюнхгаузен имеет репутацию лжеца. Недавно он утверждал, что знает такое натуральное число, которое имеет не менее 2023 делителей, отличных от единицы, каждые два из которых имеют наибольший общий делитель, больший 2023. Обманывает ли нас Барон на этот раз?

И. Двойнишников

Решение. Рассмотрим простое число $p > 2023$ и число p^{2023}. Последнее имеет делители $p, p^2, \ldots, p^{2023}$. Ясно, что каждый делитель больше 1. Так как число p является простым, то для $1 \le i \le j$ наибольший общий делитель чисел p^i и p^j равен $p^i \ge p$. Тем самым число p^{2023} удовлетворят условиям, и Барон не обманул.

Критерии.

Предъявлен верный, обоснованный пример — *7 баллов.*

11.4. Таблица размера $n \times n$ заполнена произвольными положительными числами. Петя подсчитал сумму чисел в каждой строке и получил числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася подсчитал сумму чисел в каждом столбце и получил числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Затем они составили многочлены

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n),$$

$$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdot \ldots \cdot (x - b_n).$$

В конце концов Толя решил уравнение $P(x) - Q(x) = 0$ и сказал, что получил $(n-1)$ корень. Докажите, что Толя ошибся.

И. Двойнишников

Решение. Если $P(x) = Q(x)$, то многочлен $P-Q$ нулевой, откуда он имеет бесконечно много корней, и в таком случае Толя ошибся. Иначе достаточно показать, что $\deg(P-Q) < n-1$, поскольку многочлен степени m имеет не более m корней. Старшие коэффициенты многочленов P и Q, очевидно, совпадают. По теореме Виета коэффициент при x^{n-1} многочлена P равен

$$-(a_1 + \cdots + a_n),$$

а многочлена Q равен

$$-(b_1 + \cdots + b_n).$$

Но обе суммы — это сумма чисел в исходной таблице, взятые с противоположным знаком, откуда коэффициенты многочленов P и Q при x^{n-1} также совпадают. Таким образом, степень многочлена $P-Q$ действительно меньше, чем $n-1$.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Если никак не разобран случай, когда многочлен $(P-Q)$ — нулевой — *не больше 6 баллов.*

Любое решение в предположении, что таблица заполнена каким-то определенным образом (или числа a_i, b_i как-то конкретно определены) — *0 баллов.*

11.5. AP и BQ — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, AL — его биссектриса, а M — середина стороны AB. Описанная окружность треугольника AMP пересекает луч PQ в точке K. Лучи AK и BC пересекаются в точке S. Докажите, что треугольник ALS равнобедренный.

Д. Минеев

Решение. Пусть D — вторая точка пересечения описанной окружности $\triangle AMP$ и отрезка AC. Обозначим $\angle ABC = \alpha$ (см. рис. ниже).

Так как PM — медиана прямоугольного $\triangle APB$, проведённая к гипотенузе, то $PM = BM$, а значит, $\triangle PMB$ — равнобедренный. Отсюда, применяя теорему о внешнем угле, получаем

$$\angle PMA = \angle MPB + \angle MBP = 2\alpha.$$

Четырёхугольник $ADPM$ вписанный, а значит,

$$\angle ADP = 180^\circ - \angle AMP = 180^\circ - 2\alpha.$$

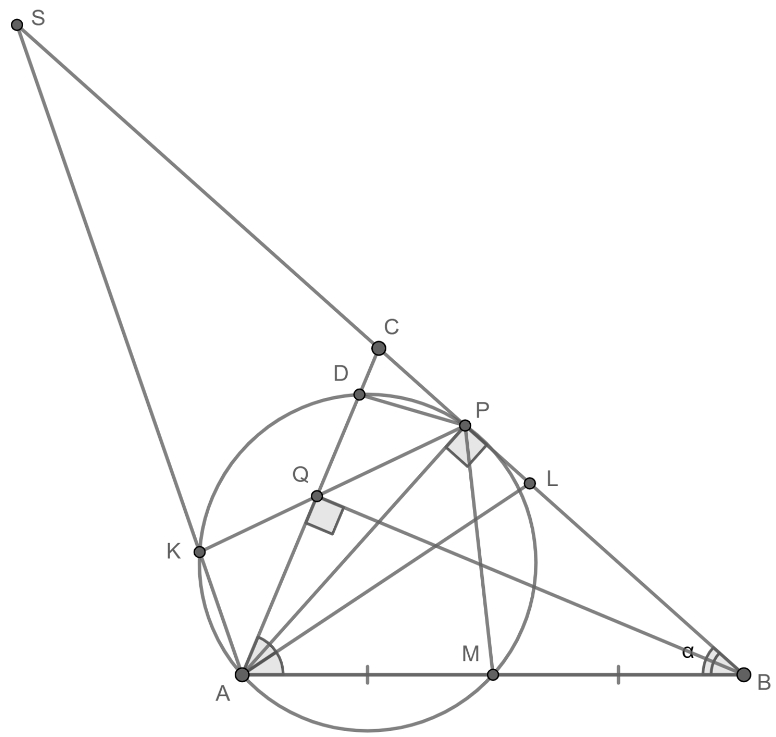
Так как $\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$, то четырёхугольник $AQPB$ — вписанный. Значит,

$$\angle DQP = 180^\circ - \angle AQP = \angle ABP = \alpha.$$

Применяя теорему о сумме углов треугольника, получаем

$$\angle DPQ = 180^\circ - \angle QDP - \angle DQP = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = \alpha.$$

Углы $\angle KAD = \angle KPD = \alpha$, так как эти углы опираются на одну дугу описанной окружности $\triangle AMP$.



По теореме о внешнем угле,

$$\angle SLA = \angle LBA + \angle LAB = \alpha + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Имеем

$$\angle SAL = \angle SAC + \angle CAL = \alpha + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle SLA,$$

откуда и следует утверждение задачи.

Критерии.

Полное верное решение — *7 баллов.*

Указано, что нужно доказать равенство сторон SA и SL — *0 баллов.*

$\angle SLA$ выражен через углы $\triangle ABC$ — *1 балл.*

$\angle SAC$ выражен через углы $\triangle ABC$ или доказано, что AS — касательная к описанной окружности $\triangle ABC$ — *3 балла.*

Баллы за последние два пункта суммируются.

Авторы и составители: *Гусева И.С., Двойнишников И.О., Жамцаева К.А., Минеев Д.А.*