Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023/2024 учебный год

Решения задач и критерии оценивания. 11 класс

$\boxed{\textbf{11.1}}$ *Чудак выписал в строчку несколько различных чисел от 1 до 9. Оказалось, что все попарные суммы выписанных чисел также различны. Какое наибольшее количество чисел мог выписать чудак?*

Решение: Возможные попарные суммы чисел лежат от 3 до 17, всего 15 сумм. Если чисел было шесть, то они уже образуют 15 попарных сумм, значит каждая сумма от 3 до 17 встретилась ровно один раз. Но 3 можно получить только как $1+2$, а 17 – как $8+9$, значит в наборе должны быть $1, 2, 8, 9$, а тогда $1+9=2+8$. Противоречие. Аналогично, если чисел больше шести. Значит, чисел не больше пяти. Пример на пять чисел: $1, 2, 3, 5, 8$.

Критерии:

- Приведён пример для пяти чисел — 2 балла;
- Доказано, что чисел меньше шести — 5 баллов.

$\boxed{\textbf{11.2}}$ *Чудак составил произведение $(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+10)$ и раскрыл в нём скобки. Получился многочлен $P(x)=x^{10}+a_9x^9+a_8x^8+\dots+a_1x+a_0$. Чему равна сумма*

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9?$$

Решение: Заметим, что $P(1)$ с одной стороны равно $(1+1)(1+2)\dots(1+10)=11!$, а с другой – это $1+a_9+a_8+\dots+a_1+a_0$. Аналогично, $P(-1)$ – это и 0, и $1-a_9+a_8-\dots+a_2-a_1+a_0$. Поэтому искомая сумма $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}=\dfrac{11!}{2}=19958400$.

Критерии:

- Найдена сумма $a_0+a_1+a_2+\dots+a_9$ — 3 балла;
- Не посчитано числовое значение $11!/2$ — баллы не снижать;
- Раскрыл скобки, посчитал вручную все коэффициенты, но ответ не сошёлся — 0 баллов.

$\boxed{\textbf{11.3}}$ *Найдите количество решений уравнения*

$$2023\cdot[x]\cdot\{x\}=x^2,$$

где $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}=x-[x]$ (например, $[3.15]=3$, $\{3.15\}=0.15$, $[-3.15]=-4$).

Решение: Число $x=0$ – корень уравнения. Пусть $x\neq 0$. Заметим, что $1>\{x\}\geqslant 0$ и $x^2>0$, поэтому $[x]\geqslant 0$, а поэтому $x>0$, более того $[x]>0$, иначе опять $x=0$ из уравнения. Подставим в уравнение вместо x сумму $[x]+\{x\}$, тогда получим

$$\{x\}^2-2021[x]\cdot\{x\}+[x]^2=0.$$

Обозначим $[x]=n$ и рассмотрим квадратный трёхчлен $f(t)=t^2-2021nt+n^2$, где n – фиксированное натуральное число. Мы хотим, чтобы у этого трёхчлена был корень на полуинтервале $[0,1)$, так как $1>\{x\}\geqslant 0$. Точка минимума этого трёхчлена $t_0=2021n/2$ лежит вне отрезка $[0,1]$, поэтому на этом отрезке функция монотонная, а в силу того, что $f(0)=n^2$ и $f(1)=1-2021n+n^2$, для существования корня на полуинтервале $[0,1)$ требуется $1-2021n+n^2<0$. Поэтому $n\leqslant 2020$, и для каждого такого n найдётся единственный корень из монотонности. Итого получили 2020 положительных корней и нулевой корень. Всего 2021 корней.

Критерии:

- Показано, что $x\geqslant 0$ — 1 балл;
- Потеряли корень $x=0$ — минус 2 балла;
- Правильно доказано существование 2020 положительных корней — 4 балла.

$\boxed{11.4}$ *Пусть M — середина AC в $\triangle ABC$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AM и BC пересекаются в точке P, а серединные перпендикуляры к CM и AB — в точке Q. Докажите, что $PQ \perp BM$.*

Решение 1: Пусть K и L — середины AM и CM соответственно, O — центр описанной окружности $\triangle ABC$. Заметим, что O лежит на всех трёх серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Обозначим через P_1 точку пересечения серединных перпендикуляров к AM и AB, а через Q_1 — серединных перпендикуляров к CM и BC. Так как $KM = ML$, то перпендикуляры, восстановленные в точках K, M, L к AC, высекают на серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC равные отрезки: $PO = OQ_1$ и $QO = OP_1$. Поэтому PP_1Q_1Q — параллелограмм, и, следовательно, $PQ||P_1Q_1$. Осталось показать, что $P_1Q_1 \perp BM$. Заметим, что P_1 и Q_1 — центры описанных окружностей для $\triangle ABM$ и $\triangle BCM$, поэтому лежат на серединном перпендикуляре к BM.

Решение 2: Согласно критерию перпендикулярности диагоналей четырёхугольника достаточно доказать, что в четырёхугольнике $MPBQ$ выполняется $MP^2 + BQ^2 = MQ^2 + BP^2$ (теорема об ортодиагональном четырёхугольнике).

Пусть K и L — середины AM и CM соответственно, $b = \dfrac{AC}{4}$. Тогда, используя теорему Пифагора и то, что точки на серединных перпендикулярах равноудалены от концов отрезка, получаем цепочку равенств $MP^2 + BQ^2 = (PK^2 + b^2) + AQ^2 = PK^2 + b^2 + (QL^2 + (3b)^2) = PK^2 + QL^2 + 10b^2$. Сумма $MQ^2 + BP^2$ расписывается совершенно аналогично.

Критерии:

- Сформулированный критерий перпендикулярности диагоналей четырёхугольника считается известным, требовать его доказательства не нужно, если участник на него правильно сослался;
- Если задача решается методом координат и вычисления не доведены до конца — 0 баллов;

$\boxed{11.5}$ *Зевс и Сизиф играют в игру. Изначально у них есть две кучки из 20^{20} и 23^{20} камней. Они ходят по очереди. Каждым ходом разрешается из большей кучки убрать количество камней, кратное числу камней в меньшей кучке. Кто забирает последний камень в одной из кучек, тот и победил. Первый ход делает мудрый Зевс. Есть ли шансы у Сизифа? :)*

Решение: Позиция в данной игре определяется парой неотрицательных чисел – количеством камней в кучках, причём после каждого хода их сумма уменьшается, а все позиции с нулевым числом являются проигрышными для того, кто ходит с такой позиции. Всё это означает, что каждая позиция в игре является выигрышной или проигрышной для того, кто начинает с неё ход, при правильной игре соперников. Покажем, что если изначально количество камней в кучках отличается хотя бы в 2 раза, то позиция является выигрышной. Предположим, что в кучках m и n камней, причём $m \geqslant 2n$. Обозначим через q остаток от деления m на n. Рассмотрим позицию (q, n). Если она проигрышная, то оставляем в кучке q камней, и тогда соперник точно проиграет, так как начинает с проигрышной позиции. А если (q, n) выигрышная, то ходим в позицию $(q + n, n)$ (тут мы пользуемся, что $m \geqslant 2n$), тогда соперник будет вынужден сходить в позицию (q, n), которая для нас будет победной.

Осталось показать, что числа 20^{20} и 23^{20} отличаются хотя бы в 2 раза. С помощью бинома Ньютона

$$\frac{23^{20}}{20^{20}} = (1 + 0.15)^{20} = 1 + 20 \cdot 0.15 + C_{20}^2 \cdot 0.15^2 + \dots > 1 + 20 \cdot 0.15 > 2.$$

Критерии:

- Доказано неравенство на отношение 20^{20} и 23^{20} хотя бы в 2 раза — 2 балла;
- Доказан факт про выигрышную позицию с количеством камней, отличающимся хотя бы в 2 раза, — 5 баллов.