Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2023 – 2024 учебный год
Математика
11 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

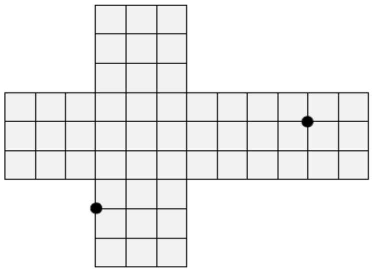
Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

11.1. Существует ли натуральное n такое, что число $n^{2024} - 1$ является какой-либо степенью двойки?

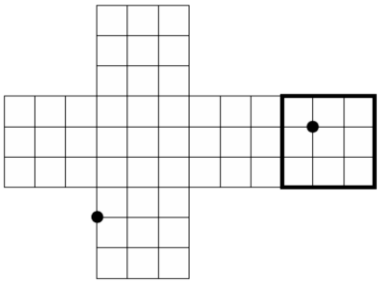
Ответ. Нет, не существует.

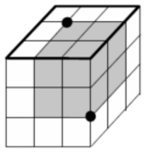
Решение. Преобразуем: $n^{2024} - 1 = (n^{1012})^2 - 1 = (n^{1012} - 1)(n^{1012} + 1)$. Предположим, что данное число является степенью двойки, тогда каждый из двух полученных множителей также является степенью двойки, причем эти множители отличаются на 2. Это возможно только в одном случае, если n^{1012} - 1 = 2, а n^{1012} + 1 = 4, но таких натуральных n не существует.

11.2. Рубик сделал развертку куба размером 3 x 3 x 3 и отметил на ней две точки − см. рисунок.



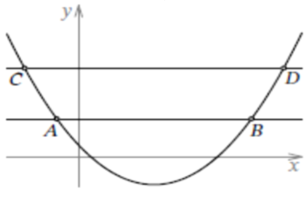
Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развёртки куб?
Ответ. $2\sqrt{3}$.
Решение. Изобразим готовый кубик (изображение выбрано так, чтобы выделенная грань развёртки оказалась сверху). Данные точки − это две противоположные вершины кубика 2 x 2 x 2. А в кубе 2 x 2 x 2 диагональ имеет длину $2\sqrt{3}$.





Замечание. Не обязательно использовать то, что точки являются концами диагонали куба. Можно просто изобразить получившуюся картинку и найти длину требуемого отрезка, применив пару раз теорему Пифагора (или методом координат и т. п.)
Комментарий:
Верное решение (достаточно верной картинки и объяснения, как именно ищется расстояние между точками) − 7 баллов.
Картинка изображена верно (возможно не с того ракурса, что в приведённом решении), но дальше расстояние найдено неверно −3 балла.
Приведён только верный ответ − 0 баллов.
Допущена ошибка при определении местонахождения точек на кубе − 0 баллов.

11.3. На доске нарисован график функции у = $x^2 + ax + b$. Оля нарисовала на том же чертеже две прямые, параллельные оси Ox (см. рисунок). Первая прямая пересекает график в точках A и B, а вторая − в точках C и D. Найдите расстояние между прямыми, если известно, что AB = 5, CD = 11.



Ответ: 24.

Решение. Пусть первая прямая имеет уравнение $y = s$, а вторая — уравнение $y = t$. Тогда расстояние между прямыми равно $(t - s)$. Длина отрезка AB равна модулю разности корней уравнения $x^2 + ax + b = s$. Распишем разность корней через формулу решения квадратного уравнения $x^2 + ax + (b - s) = 0$:

$\frac{-a+\sqrt{a^2-4(b-s)}}{2} - \frac{-a-\sqrt{a^2-4(b-s)}}{2} = \sqrt{a^2-4(b-s)} = 5$, откуда $a^2 - 4(b - s) = 25$.

Аналогично получаем $a^2 - 4(b - t) = 121$.

Вычтем из второго равенства первое и получим

$121 - 25 = (a^2 - 4(b - t)) - (a^2 - 4(b - s)) = 4(t - s)$.

Имеем $4(t - s) = 96$, то есть $t - s = 24$.

11.4. Геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \ldots$ такова, что $b_{25} = 2tg\alpha$, $b_{31} = 2sin\alpha$ для некоторого остроугла α. Найдите номер n, для которого $b_n = sin\ 2\alpha$.

Ответ: 37.

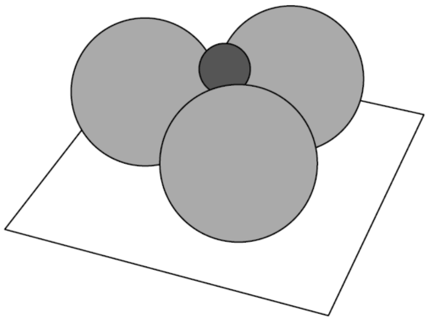
Решение. Пусть q − знаменатель данной прогрессии. Используем то, что $b_{31} = b_{25}q^6$ и $sin\ 2\alpha = 2\ sin\alpha cos\alpha$.

Имеем $q^6 = \frac{b31}{b25} = \frac{2\ sin\alpha}{2tg\alpha} = cos\alpha$.

С другой стороны, $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = cos\alpha$, откуда $sin\ 2\alpha = b_{31} \cdot q^6 = b_{37}$.

Видим, что $n = 37$ подходит. Никакое другое n не подходит, так как $0 < q^6 < 1$, значит $0 < |q| < 1$, поэтому никакие два члена прогрессии не совпадают.

11.5. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 24, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 8, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



Ответ: 48.

Решение. Центры волейбольных мячей обозначим через A, B, C, а центр теннисного − через D; верхнюю точку теннисного мяча обозначим через X. Рассмотрим сечение волейбольных мячей плоскостью ABC (см. рисунок1).

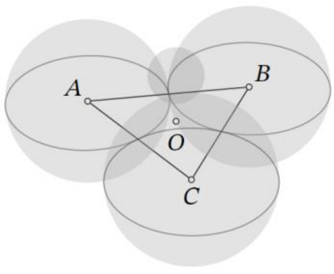


Рис.1

Это три попарно касающиеся окружности радиусом 24. Следовательно, точки A, B, C расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 48. Центр этого треугольника обозначим за O; тогда OA = 24/cos30° = $16\sqrt{3}$ (из прямоугольного треугольника OAM, где M – середина AB).
Из соображений симметрии ясно, что точки X, D и O лежат на одной вертикальной прямой. Рассмотрим сечение теннисного мяча и одного из волейбольных плоскостью ADO (рис. 2).

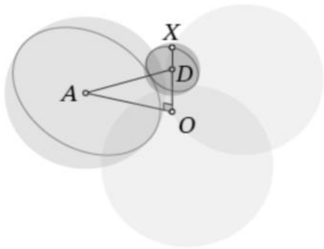


Рис.2

Треугольник ADO прямоугольный, AD = 24 + 8 = 32, по теореме Пифагора имеем OD = $\sqrt{AD^2 - OA^2}$ = 16. Сама точка O, как и вся плоскость ABC, находится на высоте радиуса волейбольного мяча, то есть 24; точка D, как мы выяснили, выше неё на 12; а точка X выше точки D на радиус теннисного мяча, то есть на 8. В сумме получаем 24 + 16 + 8 = 48.

Интернет-ресурсы:
http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru, https://siriusolymp.ru/mathematics.