**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖИ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ**
**КРЫМСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ ПОСТДИПЛОМНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2023-2024 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
**11 КЛАСС**

**Задание 11.1. (7 баллов)**

Решите уравнение

$$(x^2-7x)\sqrt[2023]{x^4-14x^3+49x^2+1}+(2x+6)\sqrt[2023]{4x^2+24x+37}=0$$

**Ответ: 2; 3.**

**Решение.**

Заметим, что оба слагаемые представляют собой выражение вида

$t\cdot\sqrt[2023]{t^2+1}$. Соответствующая функция является нечетной и возрастающей на всей числовой оси. В функциональном виде уравнение имеет вид:

$$f(x^2-7x)\ -f(2x+6)=\ f(-2x-6)$$

В силу монотонности функции, имеем

$$x^2-7x=-2x-6$$

Отсюда: $x=2, x=3$.

**Ответ: 2; 3.**

**Критерии оценивания:**

| Баллы | Правильность (ошибочность ) решения |
|---|---|
| 7 | Полное обоснованное решение |
| 5 | Правильное решение с вычислительной ошибкой |
| 2 | Плохо обоснованное решение. |
| 0 | Приведён только ответ или задача не решена |

**Задание 11.2. (7 баллов)**

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y \ \sin(x+y) + 0{,}125 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

**Ответ:** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{k}{2}\pi, \quad n,k \in Z \\ y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} - \pi n + \frac{k}{2}\pi, \quad n,k \in Z \\ z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k}\frac{\pi}{12} + \pi n + \frac{k}{2}\pi, \quad n,k \in Z \\ y = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k}\frac{\pi}{12} - \pi n + \frac{k}{2}\pi, \quad n,k \in Z \\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$$

**Решение.**

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\sin x \cos y \ \sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))\sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0$$

$$4\sin^2(x+y) + 4\sin(x-y)\sin(x+y) + 1 = 0$$

$$(2\sin(x+y) + \sin(x-y))^2 + 1 - sin^2(x-y) = 0$$

$$\begin{cases} (2\sin(x+y) + \sin(x-y))^2 = 0 \\ 1 - sin^2(x-y) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем,

$$\left[\begin{array}{l} x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z \\ x - y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \qquad n \in Z \end{array}\right.$$

Тогда, из первого уравнения системы:

$$\left[\begin{array}{ll} x+y=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k, & k\in Z \text{ ( в первом случае)} \\ x+y=(-1)^{k}\dfrac{\pi}{6}+\pi k, & k\in Z \text{ ( во втором случае)} \end{array}\right.$$

После арифметических преобразований получим:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ y=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{12}-\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ z=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k}\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ y=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k}\dfrac{\pi}{12}-\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ z=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$$

**Ответ:** $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\pi n+\frac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ y=-\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\pi n+\frac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ z=\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k}\dfrac{\pi}{12}+\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ y=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k}\dfrac{\pi}{12}-\pi n+\dfrac{k}{2}\pi, & n,k\in Z \\ z=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$$

**Критерии оценивания:**

| **Баллы** | **Правильность (ошибочность ) решения** |
|---|---|
| 7 | Полное обоснованное решение |
| 5 | Найдены x, y, но не найдено z. |
| 2 | Ход решения верный, но есть ошибки в ходе решения |
| 0 | Приведен только ответ |

**Задание 11.3. (7 баллов)**

Сравните числа $log_{2023}2024$ и $log_{2022}2023$.

**Ответ: $\boldsymbol{log_{2023}2024 < log_{2022}2023}$**

**Решение.**

$$log_{2023}2024 - 1 = log_{2023}\frac{2024}{2023}$$

$$log_{2022}2023 - 1 = log_{2023}\frac{2023}{2022}$$

Функция $f(x) = log_{2023}x - 1$ возрастает на всей области определения.

Так как

$$\frac{2024}{2023} = 1 + \frac{1}{2023} < 1 + \frac{1}{2022} = \frac{2023}{2022}$$

то

$$log_{2022}\frac{2023}{2022} > \ log_{2022}\frac{2024}{2023} > log_{2023}\frac{2024}{2023}$$

Следовательно $log_{2023}2024 < log_{2022}2023$

**Ответ: $\boldsymbol{log_{2023}2024 < log_{2022}2023}$**

**Критерии оценивания:**

| **Баллы** | **Правильность (ошибочность ) решения** |
|---|---|
| 7 | Любое полное обоснованное решение |
| 4 | Решение содержит не влияющие на на получение ответа неточности |
| 1 | Есть продвижения, которые могут привезти к верному решению |
| 0 | Приведен только ответ |

**Задание 11.4. (7 баллов)**

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если расстояние от середины высоты до бокового ребра равно $2\sqrt{3}$, а до боковой грани - 2.

**Ответ:** $\mathbf{216\sqrt{3}}$

**Решение.**

Рассмотрим сечение пирамиды SABC, проходящее через боковое ребро SA и апофему SD противоположной грани.

Высота SH пирамиды лежит в этом сечении. Расстояние от точки H до прямой SD равно $\mathrm{HN} = 4$, а расстояние от H до прямой SA равно $\mathrm{HM} = 4\sqrt{3}$. Обозначим $\mathrm{SH} = \mathrm{h}, \mathrm{AB} = \mathrm{a}$ и $\mathrm{HD} = \mathrm{d} = \mathrm{a}\frac{\sqrt{3}}{6}$, тогда $\mathrm{AH} = 2\mathrm{d}$.

Из подобия треугольников SHD и SNH получаем, что

$$\frac{4}{d} = \frac{\sqrt{h^2 - 16}}{h}$$

Тогда

$$\frac{1}{d^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{16}$$

Аналогично

$$\frac{1}{(2d)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{1}{48}$$

Откуда

$$\frac{3}{(2d)^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = \frac{1}{24}$$

$$d^2 = 18$$

Поэтому

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{18} = \frac{1}{144}$$

$$\mathrm{h} = 12$$

Таким образом, объем равен

$$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{a}^2\mathrm{h}}{4\sqrt{3}} = \mathrm{d}^2\mathrm{h}\sqrt{3} = 18 \cdot 12\sqrt{3} = 216\sqrt{3}$$

**Ответ: $216\sqrt{3}$**

**Критерии оценивания:**

| Баллы | Правильность (ошибочность ) решения |
|---|---|
| 7 | Задача решена полностью |
| 5 | Задача решена с арифметической ошибкой |
| 2 | Построено сечение, а вычисления не выполнены |
| 0 | Нет решения, даже если есть ответ. |
| 0 | Задача не решена |

**Задание 11.5. (7 баллов)**

Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существуют натуральные числа $x, y, u, v$, удовлетворяющие уравнениям

$$x^2 + y^2 = (107 - a)(a - 90)$$

и

$$a(15u + 3v - a) = 54(u^2 - v^2)$$

**Ответ: a=99.**

**Решение.**

Рассмотрим вначале второе уравнение. Перенесем обе части в одну сторону и рассмотрим квадратное уравнение относительно a.

Тогда:

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}((15u + 3v) \pm \sqrt{225u^2 + 90uv + 9v^2 - 216(u^2 - v^2)}) = \frac{(15u + 3v) \pm (3u + 15v)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = 9(u + v) \\ a_2 = 6(u - v) \end{array}\right.$$

Итак, $a$ является целым числом.

Рассмотрим теперь первое уравнение:

$$x^2 + y^2 = (107 - a)(a - 90)$$

Так как левая часть положительна, то и правая часть должна быть больше 0. Следовательно $a \in (90;\ 107)$.

Далее, если $a = 9(u + v)$, то a делится на 9. На интервале $(90;\ 107)$ такое число одно: 99.

Проверим, что при $a = 99$, существуют натуральные $x, y, u, v$, удовлетворяющие уравнениям.

Пусть $x = y = 6$, тогда

$$6^2 + 6^2 = (107 - 99)(99 - 90) = 72$$

Пусть $u = 6$, $v = 5$, тогда

$$99(15 \cdot 6 + 3 \cdot 5 - 99) = 54(6^2 - 5^2) = 594$$

Если $a = 6(u - v)$, то a делится на 6. На интервале $(90;\ 107)$ такое чисел два: 96 и 102.

При $a = 96$

$$x^2 + y^2 = (107 - 96)(96 - 90) = 66$$

Таких натуральных $x, y$ не существует.

При $a = 102$

$$x^2 + y^2 = (107 - 102)(102 - 90) = 60$$

Таких натуральных $x, y$ не существует.

**Ответ: $a = 99$**

**Критерии оценивания:**

| Баллы | Правильность (ошибочность ) решения |
|---|---|
| 7 | Полное обоснованное решение. |
| 5 | Решение верное, но нет проверки существования натуральных $x, y, u, v$ для $a = 99$ |
| 3 | Рассмотрен только один случай $a = 99$ полностью, а случаи $a = 96$ и $a = 102$ только констатированы. |
| 2 | Даны все три значения $99;\ 96;\ 102$, но нет отбора значений |
| 0 | Приведен только ответ |