11 класс – 2023

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. В десятичной записи числа $20! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot20$ (произведение всех натуральных чисел от 1 до 20) затёрты шесть цифр: 24329020*81766*****. Восстановите эти цифры. Ответ обоснуйте.

Ответ: 2432902**0**81766**40000**.

Решение. Последние четыре цифры нули, так как $2\cdot5\cdot10\cdot15\cdot20 = 3\cdot10^4$ делится на 10^4. Так как $20!$ делится на 9, то и сумма $m+n+50$ всех цифр числа $20! = 24329020m81766n0000$ делится на 9, поэтому $m+n = 4$ или $m+n = 13$. Так как $20!$ делится на 11, то суммы цифр на нечётных и чётных местах должны отличаться на число, кратное 11, тогда $(23 + m + n) – 27$ делится на 11 и $m + n \le 18$, поэтому $m + n = 13$ не подходит, а подходит только $m + n = 4$. Так как $20! : 10^4 = 3\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19$ делится на 8, то трёхзначное число $66n$ делится на 8, поэтому $n = 4$ и $m = 0$ (цифру $n = 4$ перед четырьмя нулями можно найти иначе, например перемножая последние цифры чисел 1, 2, .., 20, за исключением двух нулей, двух цифр 5 и двух цифр 2)

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Показано, что последние четыре цифры нули – 1 балл. Показано, что $m+n = 4$ – 1 балл.

11.2. Найдите все тройки (p, q, r) простых чисел, для которых выполнено равенство $p + q^2 = r^4$.

Ответ: (7; 3; 2) – единственное решение

Решение. Так как число p – простое и $p = r^4 – q^2 = (r^2 – q)(r^2 + q)$, то $r^2 – q = 1$ и $r^2 + q = p$. Так как число q – простое и $q = r^2 – 1 = (r – 1)(r + 1)$, то $r – 1 = 1$ и $r + 1 = q$. Поэтому $r = 2$, $q = 3$, $p = 7$.

Комментарии. Только верный ответ – 1 балл. Получена система $r^2 – q = 1$ и $r^2 + q = p$ – 3 балла.

11.3. Докажите, что если $x^3 + px^2 + qx + r \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, где числа x_1, x_2, x_3 – положительны и $x_1 \ne x_2$, то $p^2 + q^2 + 18r > 0$.

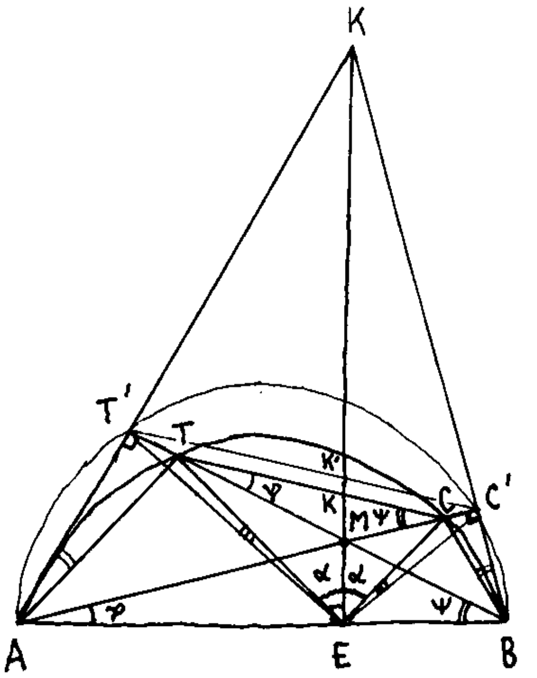
Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ за a. Тогда, с учётом теоремы Виета, $p^2 + q^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \ge 9a^2 + 9a^4 = 9a^2(1 + a^2) \ge 9a^2\cdot2a = 18a^3 = -18r$, и равенство возможно только при $x_1 = x_2 = x_3$.

Комментарии. Применение теоремы Виета для кубического уравнения – 2 балла.
Доказательство, что $p^2 + q^2 + 18r \ge 0$ (без учёта $x_1 \ne x_2$), если всё остальное верно – 6 баллов.

11.4. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $a^2 + b^2 = 18$, то $1/(5-a) + 1/(5-b) \geq 1$.

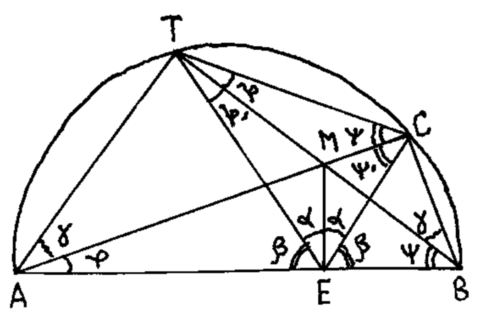
<u>Доказательство</u>. Так как из неравенства $a^2 + b^2 = 18$ следует, что $5-a > 0$ и $5-b > 0$, то неравенство $1/(5-a) + 1/(5-b) \geq 1$ можно переписать в виде $10 - a - b \geq 25 - 5(a + b) + ab$. Так как $4(a + b) - 15 - ab = 4(a + b) - 15 - ((a + b)^2 - 18)/2$, то неравенство перепишется в виде $t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6) \leq 0$, где $t = a + b$. Из неравенства $18 = a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2$ следует, что $t = a + b \leq 6$. Осталось проверить, что $t = a + b > 2$. Это следует, например, из неравенства $(a + b)^2 > a^2 + b^2 = 18$.

<u>Комментарии</u>. Сведение к неравенству $(t - 2)(t - 6) \leq 0$ – <u>3 балла</u>.



11.5 В четырехугольнике ABCT сторона AB больше стороны CT и не параллельна стороне CT. Диагонали AC и BT пересекаются в точке M. На отрезке AB нашлась точка E такая, что ME перпендикулярно AB. Известно, что ∠CEM = ∠TEM, а четырёхугольник ABCT вписан в окружность. Докажите, что сторона AB является диаметром этой окружности.

<u>**1-е решение.**</u> Построим на AB как на диаметре полуокружность так, как указано на рисунке (другой возможный случай расположения окружностей, когда полуокружность с диаметром AB расположена не снаружи, а внутри сегмента ABCT исходной описанной окружности, рассматривается аналогично). Продолжим диагонали AC и BT до пересечения с построенной полуокружностью в точках C' и T' соответственно. Продолжим AT' и BC' до пересечения в точке K. Углы AT'B и BC'A – прямые, так как AB – диаметр построенной полуокружности. M – точка пересечения высот треугольника AKB, поэтому точки K, M, E лежат на одной прямой. Так как высоты треугольника AKB являются биссектрисами «высотного» треугольника T'C'E, то φ = ∠CTB = ∠CAB = ∠C'AB = ∠C'T'B = ∠ET'B и ψ = ∠TCA = ∠TBA = ∠T'BA = ∠T'C'A = ∠EC'A, а ∠T'EM = ∠C'EM. Поэтому прямые TC и TC параллельны, а углы T'ET и C'EC равны. По свойству биссектрис треугольников TEC и T'EC': TE:CE = TK:CK = T'K':C'K' = T'E':C'E'. Поэтому треугольники T'TE и C'CE подобны и, следовательно, φ = ∠ET'B = ∠EC'A = ψ, чего не может быть, так как прямые CT и AB не параллельны. Полученное противоречие означает, что T' ≡ T и C' ≡ C, так что окружности совпадают и AB – их общий диаметр.



<u>**2-е решение.**</u> Из треугольников ACE и BTE получаем: $\varphi+\psi' = 180^0-2\alpha-\beta = \varphi'+\psi$. По «теореме синусов» для треугольников TME и CME получаем: $TM:\sin\alpha = ME:\sin\varphi'$ и $CM:\sin\alpha = ME:\sin\psi'$. Поэтому $TM:CM = \sin\varphi':\sin\psi'$. С другой стороны, из подобия треугольников ATM и BCM получаем: $TM:CM = AM:BM = \sin\varphi:\sin\psi$. Следовательно, $\sin\varphi':\sin\psi' = \sin\varphi:\sin\psi$ или $\sin\varphi'\cdot\sin\psi = \sin\varphi\cdot\sin\psi'$ (это равенство может быть получено и другим путём, например, применением для треугольника TCE теоремы Чевы в тригонометрической форме: $(\sin\varphi':\sin\varphi)\cdot(\sin\psi:\sin\psi')\cdot(\sin\alpha:\sin\alpha) = 1$). Равенство $\sin\varphi'\cdot\sin\psi = \sin\varphi\cdot\sin\psi'$ можно переписать в виде $\cos(\varphi'-\psi)-\cos(\varphi'+\psi) = \cos(\varphi-\psi')-\cos(\varphi+\psi')$. С учётом равенства $\varphi'+\psi = \varphi+\psi'$ получаем: $\cos(\varphi'-\psi) = \cos(\varphi-\psi')$, откуда $\varphi'-\psi = \varphi-\psi'$ или $\varphi'-\psi = -\varphi+\psi'$. Из равенств $\varphi'-\psi = -\varphi+\psi'$ и $\varphi'+\psi = \varphi+\psi'$ получаем, что $\varphi'= \psi'$ и $\varphi = \psi$, что невозможно в силу не параллельности TC и AB. А из равенств $\varphi'-\psi = \varphi-\psi'$ и $\varphi'+\psi = \varphi+\psi'$ получаем, что $\varphi' = \varphi$ и $\psi = \psi'$. Поэтому четырёхугольники ATME и BCME вписанные в окружности с диаметрами соответственно AM и BM, углы ATB и ACB прямые и, следовательно, AB – диаметр.